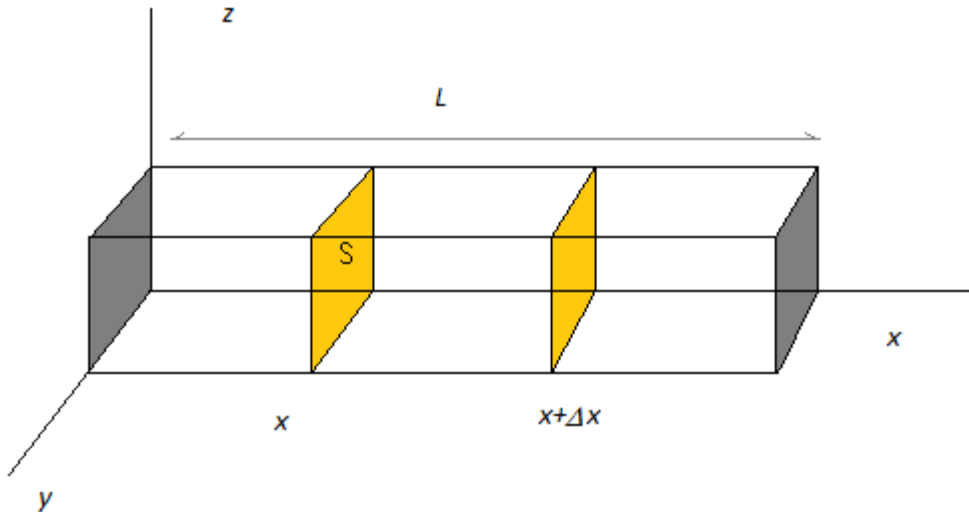


2. A Equação do Calor

2.1 Problemas Difusivos: dedução da equação do calor.

Consideremos uma barra finita, de comprimento l , feita de material homogêneo condutor de calor (por ex. cobre), cuja seção transversal possui área S . Suponhamos que a superfície lateral da barra encontra-se termicamente isolada e que a barra é suficientemente fina, de modo que a única possibilidade de transferência de calor com o meio ambiente ocorre nas extremidades da barra. A homogeneidade do material e o isolamento térmico implicam que o **fluxo de calor** ocorre somente na direção longitudinal, de modo que o problema é unidimensional. Portanto, a temperatura pode ser considerada constante em cada seção transversal da barra, podendo, evidentemente, variar de uma seção para outra.



A obtenção da equação da condução de calor será conseqüência da aplicação de duas leis físicas.

Lei de Fourier do resfriamento:

Dadas duas placas P_1 e P_2 com áreas iguais a S , mantidas a temperaturas constantes T_1 e T_2 respectivamente, sendo P_1 paralela a P_2 com uma distância d entre elas. Então, haverá transferência de calor da placa mais quente para a placa mais fria, e a quantidade de calor por unidade de tempo, transferida de uma placa para outra será dada por

$$Q = kS \frac{|T_2 - T_1|}{d}$$

Onde $k > 0$ é a condutividade térmica do material existente entre as placas ($[k] = \text{cal.}/\text{cm.s.}^\circ\text{C}$).

OBS: Pode-se ter $k = \text{cte.}$, $k = k(x)$ ou $k = k(x, u)$.

Agora, seja x a abscissa de um ponto da barra e seja $u(x, t)$ a temperatura da seção da barra pelo ponto x no instante t . Calculemos a quantidade de calor no pedaço da barra delimitado pelo intervalo $[x, x + \Delta x]$. Tomemos uma partição finita desse intervalo definida pelos pontos: $x = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x + \Delta x$. Supondo $u(x, t)$ contínua, a quantidade de calor no pedaço delimitado pelo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é, no instante t , aproximadamente (para n suficientemente grande) dada por

$$Q = cm_i u_{[x_{i-1}, x_i]} \cong c\rho S(x_i - x_{i-1})u(\xi_i, t), \text{ para } x_{i-1} < \xi_i < x_i,$$

onde

c = calor específico do material, m_i = massa do corpo delimitado por $[x_{i-1}, x_i]$,

ρ = densidade do material, $u_{[x_{i-1}, x_i]}$ = temperatura no corpo delimitado por $[x_{i-1}, x_i]$.

Portanto, a quantidade de calor em todo pedaço compreendido no intervalo $[x, x + \Delta x]$ será, no instante t , aproximadamente

$$Q \cong \sum_{i=1}^n c\rho S u(\xi_i, t)(x_i - x_{i-1})$$

Então, obteremos uma melhor aproximação quando fizermos a amplitude máxima dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tender a zero. Representando por $Q(t)$ a quantidade de calor no instante t no pedaço da barra delimitado por $[x, x + \Delta x]$, tem-se que o limite do somatório quando o máximo $\{|x_i - x_{i-1}| : 1 \leq i \leq n\}$ tende a zero, existe devido a hipótese de continuidade de $u(x, t)$ sobre a barra $[0, l]$, e obtém-se que

$$Q(t) = \int_x^{x+\Delta x} c\rho S u(x, t) dx.$$

Caso exista dentro da barra criação ou absorção de calor (por ex. se houver alguma corrente elétrica ou alguma reação química no material da barra), esse fato seria caracterizado por uma densidade, $F(x, t)$, da fonte ou sorvedouro térmico em questão, no ponto x da barra e no instante t . Neste caso, a quantidade de calor fornecido (ou absorvido) no pedaço $[x, x + \Delta x]$ será, no instante t , aproximadamente

$$Q(t) \cong \sum_{i=1}^n SF(\xi_i, t)(x_i - x_{i-1})$$

donde obtém-se que

$$Q(t) = \int_x^{x+\Delta x} SF(x, t) dx$$

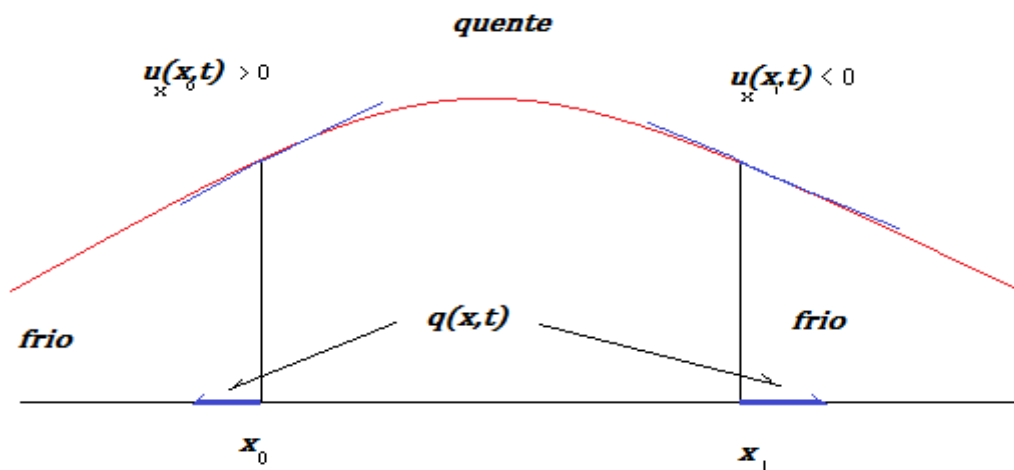
Por outro lado, pondo $T_2 = u(x + d, t)$, $T_1 = u(x, t)$ e fazendo $d \rightarrow 0^+$, a Lei de Fourier nos diz que

$$\lim_{d \rightarrow 0} Q(t) = \lim_{d \rightarrow 0} kS \frac{|u(x+d, t) - u(x, t)|}{d} = kS \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|$$

Definição: O *fluxo de calor* na direção positiva do eixo-x é dado por

$$q(x, t) = -kS \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

Interpretação gráfica



Até agora utilizamos apenas uma lei física. Neste ponto, utilizaremos uma segunda lei para dedução da equação do calor, a *Lei da conservação da energia*.

Varição do calor em $[x, x + \Delta x]$ = fluxo do calor nas extremidades de $[x, x + \Delta x]$ + calor total dentro de $[x, x + \Delta x]$

O que nos dá a seguinte equação de balanço

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} c\rho S u(x, t) dx = kS [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + S \int_x^{x+\Delta x} F(x, t) dx$$

que é a equação do calor na forma integral. Pelo teorema do valor médio, na forma integral, tem-se que se f é contínua em $[a, b]$ então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

Por outro lado, supondo $u(x, t)$ continuamente diferenciável na variável t , então pela regra de Leibniz tem-se que

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} c\rho Su(x,t)dx = \int_x^{x+\Delta x} c\rho Su_t(x,t)dx$$

Portanto, existem $\xi_1, \xi_2 \in]x, x + \Delta x[$ tais que

$$c\rho u(\xi_1, t)\Delta x = k[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + F(\xi_2, t)\Delta x$$

Dividindo essa equação por Δx e fazendo $\Delta x \rightarrow 0$ obtem-se a equação diferencial parcial

$$c\rho u_t(x,t) = \partial_x(ku_x(x,t)) + F(x,t)$$

ou seja

$$u_t(x,t) = \alpha^2 \partial_x(ku_x(x,t)) + f(x,t)$$

onde $\alpha^2 = 1/c\rho$, $f(x,t) = F(x,t)/c\rho$. Esta é a equação do calor unidimensional.

OBS: Como se pode ter $k = k(x, u)$ a equação do calor pode ser até quase-linear!

OBS: A equação obtida é muito genérica, uma vez que descreve os **fenômenos difusivos**, no caso a difusão do calor, e, portanto, pode possuir um número muito grande de soluções. De modo que, se faz necessário que tenhamos mais informações sobre o problema em questão para que possamos caracterizar melhor a solução desejada. Essas informações surgem naturalmente, uma vez que todo problema objetivo possui fronteiras de alguma espécie com o meio no qual se encontra e, além disso, todo problema objetivo sempre é observado a partir de algum instante inicial t_0 , o que nos leva a ter que especificar de alguma maneira as condições físicas nesse instante inicial. Assim, obtemos as informações adicionais caracterizadoras especificando as **condições de fronteira** e as **condições iniciais** do problema em questão. Essas condições podem ser, de um modo geral, dos seguintes tipos

Tipo I:

$$u(0,t) = T_1, u(L,t) = T_2 \text{ (extremidades à temperaturas constantes).}$$

ou

$$u(0,t) = g_1(t), u(L,t) = g_2(t) \text{ (extremidades à temperaturas variáveis).}$$

Tipo II:

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \text{ (extremidades isoladas termicamente).}$$

ou

$$u_x(0,t) = g_1(t), u_x(L,t) = g_2(t), \text{ (fluxo através das extremidades).}$$

Tipo III: meio externo à temperaturas $g_1(t), g_2(t)$ respectivamente, havendo transferência de calor entre o meio e a barra

$$\begin{aligned}
 ku_x(0,t) &= h[u(0,t) - g_1(t)] \\
 \text{e} \\
 -ku_x(L,t) &= h[u(L,t) - g_2(t)]
 \end{aligned}$$

Tipo IV: combinações das condições acima.

Condição Inicial:

$$u(x,0) = f(x), \text{ onde } f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$$

OBS: $f(x)$ é a distribuição inicial de temperatura ao longo da barra.

Definição: Os problemas com valores iniciais e de fronteira são denotados por **PVIF**.

2.2 O Método de Separação de Variáveis ou Método de Fourier:

Este método aplica-se somente a PVIF's satisfazendo as seguintes condições

- (i) A EDP é linear, podendo possuir coeficientes variáveis.
- (ii) As condições de fronteira são homogêneas, isto é, são do tipo

$$\begin{aligned}
 au_x(0,t) + bu(0,t) &= 0 \\
 cu_x(L,t) + du(L,t) &= 0
 \end{aligned}$$

onde a, b, c, d são $\in \mathbb{R}$.

- (iii) O domínio Ω das variáveis espaciais é limitado e em algum sistema de coordenadas a sua fronteira $\partial\Omega$ consiste de segmentos de retas.

Exemplo: Consideremos um caso simples. Seja o

$$PVIF : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, 0 < x < L, 0 < t < +\infty \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

O método consiste em procurar soluções da forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Substituindo na EDP obtém-se que

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \quad (1)$$

Como não interessa a solução trivial, podemos dividir (1) por $\alpha^2 X(x)T(t)$ e obter que

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (2)$$

onde o lado esquerdo depende apenas de t e o lado direito depende apenas de x e são iguais. Então, necessariamente, ambos os lados independem de x e t , ou seja, são iguais a uma constante λ , o que nos leva as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, 0 < x < L \\ T'(t) - \lambda \alpha^2 T(t) = 0, 0 < t < \infty \end{cases}$$

Impondo as condições de fronteira, obtém-se que

$$0 = X(0)T(t) = X(L)T(t), \forall t > 0.$$

Como não interessa a solução nula, então

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Obtém-se assim o seguinte **problema de auto-valores** ou **problema espectral** (chamado **Problema de Sturm-Liouville**) para o operador diferencial linear $\frac{d^2}{dx^2}$:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Analisemos os possíveis valores de λ .

1º Caso: $\lambda > 0$: Neste caso, a solução geral é dada por

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}x}.$$

Impondo as condições de fronteira, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{-\sqrt{\lambda}L} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

O que implica em $X \equiv 0$.

2º Caso: $\lambda = 0$: Neste caso, tem-se que

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Impondo as condições de fronteira, obtém-se

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 L + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

O que implica em $X \equiv 0$.

3º Caso: $\lambda < 0$: Neste caso, $\lambda = -\gamma^2, \gamma \neq 0$.

A solução geral é dada por

$$X(x) = C_1 \cos \gamma x + C_2 \operatorname{sen} \gamma x.$$

Impondo as condições de fronteira, não se obtém uma única solução mais sim uma infinidade (enumerável) de soluções, $X_n(x)$, denominadas **auto-funções** do problema de auto-valores, cada uma associada a um respectivo auto-valor dado por

$$\lambda = \lambda_n = -\gamma_n^2 = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, X_n(x) = \operatorname{sen} \lambda_n x, n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

De modo que, o **auto-sistema** é dada por

$$\Lambda = \left\{ -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}; \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right\}_1^{+\infty}.$$

Por outro lado, resolvendo a EDO em T , para esses valores de λ_n , obtém-se a seguinte família de soluções

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \alpha^2 t}, n = 1, 2, \dots$$

Portanto, a seqüência de funções

$$u_n(x, t) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \alpha^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, n \geq 1$$

satisfaz a EDP e as condições de fronteira para cada $n \geq 1$. Essas funções só não são soluções do PVIF porque não se tem necessariamente que

$$\varphi(x) = C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \forall n \geq 1,$$

uma vez que o dado inicial é único e arbitrário. Por outro lado, como a EDP é linear e homogênea, então vale o seguinte resultado

Princípio da Superposição Generalizado:

Se os termos de uma seqüência $\{u_n\}_1^\infty$ são soluções da equação diferencial linear homogênea: $L[u]=0$ (ordinária ou a derivadas parciais), então a série $\sum u_n$ também é solução da equação, caso o cálculo das derivadas de u , que aparecem na equação, possa ser feito mediante derivação termo a termo na série.

De modo que, pelo princípio da superposição, o candidato à solução do PVIF seria a função

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

Entretanto, quando Fourier impôs a condição inicial se deparou com dois problemas:

(P1) Quais funções φ definidas em $[0,L]$ podem ser representadas em séries trigonométricas, ou seja admitem a seguinte representação infinita

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x ?$$

OBS: Assim surgiu a *síntese de Fourier*.

(P2) Se uma função admitir tal representação como determinar os coeficientes C_n ?

OBS: Assim surgiu a *análise de Fourier*.

A *análise e síntese de Fourier (Análise Harmônica)* estudam as funções periódicas definidas em \mathbb{R} ou \mathbb{C} que podem ser representadas por séries trigonométricas.

Definição: Uma *Série Trigonométrica* S é uma série de funções com a seguinte estrutura

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

Antes de respondermos a essas perguntas analisemos as relações que devem existir entre os coeficientes a_n, b_n e f . Seja f uma função real que admite uma tal representação, com a série convergindo uniformemente para f . Como o termo geral é uma função contínua e periódica, de período $2L$, então necessariamente f também será periódica, com período $2L$, e, como a convergência é uniforme, f será contínua. Então, como toda função contínua é integrável num intervalo fechado e limitado, podemos integrar f no intervalo $[-L, L]$ e obter que

$$\int_{-L}^L f(x) dx = a_0 L + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L} x dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx$$

e como

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx = 0, \forall n \geq 1,$$

obtem-se que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

Para obtermos os outros coeficientes utilizamos as seguintes

Relações de Ortogonalidade:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\cos\frac{(m+n)\pi}{L}x + \cos\frac{(m-n)\pi}{L}x \right] dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ L, m = n \end{cases}$$
$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\sin\frac{(m+n)\pi}{L}x + \sin\frac{(n-m)\pi}{L}x \right] dx = 0, \forall m, n \geq 0$$
$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\cos\frac{(m-n)\pi}{L}x - \cos\frac{(m+n)\pi}{L}x \right] dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ L, m = n \end{cases}$$

OBS: Para a obtenção das relações de ortogonalidade foi fundamental que o intervalo fosse $[-L, L]$ por motivos matemáticos. Entretanto, a barra “física” é dada pelo intervalo $[0, L]$ e não pelo intervalo $[-L, L]$. Interpretaremos o intervalo $[-L, L]$ como representando uma barra “matemática”.

Fórmulas de Euler-Fourier: Se $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ puder ser representada por uma série trigonométrica, então multiplicando $S(x)$ por $\cos(n\pi/L)x$, integrando sobre $[-L, L]$ e assumindo que é possível a integração termo a termo na série $S(x)$, obtem-se que

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad \forall n \geq 0$$

Procedendo analogamente em relação à $\sin(n\pi/L)x$ obtem-se que

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx, \quad \forall n \geq 1$$

Definição: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função par** se $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função ímpar** se $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Propriedades:

(P1) f, g par $\Rightarrow f + g$ par, f, g ímpar $\Rightarrow f + g$ ímpar.

(P2) f, g par $\Rightarrow f \cdot g$ par, f, g ímpar $\Rightarrow f \cdot g$ par.

(P3) f par, g ímpar $\Rightarrow f \cdot g$ ímpar.

$$(P4) \quad \int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } f \text{ é ímpar} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{se } f \text{ é par} \end{cases}$$

De modo que,

$$f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ par} \Rightarrow a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad \forall n \geq 0, b_n = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

$$f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ímpar} \Rightarrow a_n = 0, \quad \forall n \geq 0 \text{ e } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx, \quad \forall n \geq 1.$$

2.3 Análise e síntese de Fourier

Definição: Dada $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, sua **série de Fourier** será denotada por $S[f]$, com os coeficientes a_n, b_n dados acima e denominados **coeficientes de Fourier** de f .

Notação:

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right), x \in \mathbb{R}$$

Definição: $\mathcal{L}^1([-L, L]) = \{f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}; f, |f| \text{ integráveis à Riemann}\}$

Condição suficiente para análise de Fourier:

Se $f \in \mathcal{L}^1([-L, L])$ então a_n, b_n estão bem definidos uma vez que

$$|a_n| \leq \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx$$

De modo que, dada $f \in \mathcal{L}^1([-L, L])$, periódica de período $2L$, pode-se obter a série de Fourier de f , ou seja, pode-se fazer a seguinte associação

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right).$$

O problema principal é saber para quais valores de x a série de Fourier $S[f](x)$ converge para $f(x)$, e se a convergência é uniforme. A série de Fourier de uma função pode ser divergente! Existem exemplos de funções cujas séries de Fourier divergem em quase todos os pontos! (vide **Titchmarsh** "Theory of Functions", pg. 416). Embora o estudo das séries de Fourier seja realizado para uma classe bem mais ampla de funções, nos contentaremos com uma classe pequena, bem próxima das funções contínuas, precisamente a classe das **funções contínuas por partes**.

Definição: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua por partes** ou **seccionalmente contínuas** se dados $a < b$ existe uma partição finita de $[a, b]; \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ tal que:

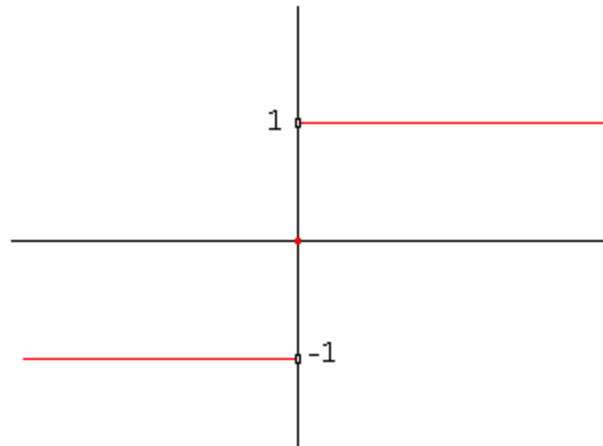
- (i) f restrita ao subintervalo $]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, \dots, n$, é contínua.
- (ii) Existem os limite laterais; $f(x_i^+), f(x_i^-), i = 0, \dots, n$.

Notação: $C_p([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ contínua por partes}\}$.

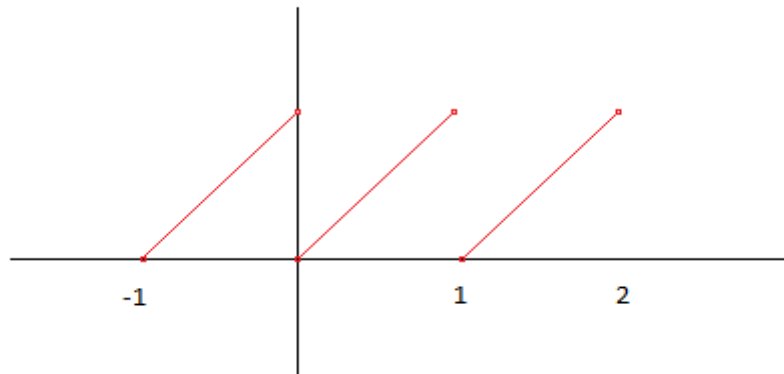
Exemplo: Funções que são contínuas por partes.

- (i) função sinal de x ;

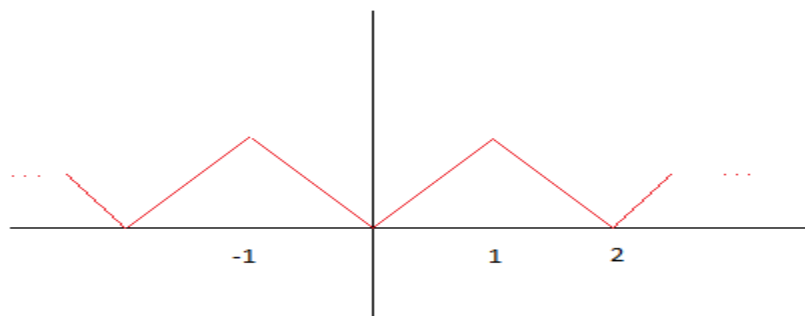
$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



(ii) $f(x) = x - \llbracket x \rrbracket$



(iii) $f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 \leq x \leq 1 \\ f(x+2) = f(x) \end{cases}$



Exemplo: funções que não são contínuas por partes;

(i) $1/x, \operatorname{tg} x, \ln x$ (funções com descontinuidades de 2ª espécie).

(ii) funções com um nº infinito de descontinuidades de salto dentro de um intervalo finito.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x < \infty \\ 1/n, & 1/(n+1) \leq x \leq 1/n \\ 0, & -\infty < x \leq 0 \end{cases}$$

Condições suficientes para síntese de Fourier:

Teorema: (Dirichlet-Riemann)

Hipóteses:

(H1) $f, f' \in C_p([-L, L])$.

(H2) f estendida periodicamente sobre \mathbb{R} , com período $2L$.

Tese: A série de Fourier de f converge pontualmente em \mathbb{R} , sendo que para cada $x \in \mathbb{R}$ se tem:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right)$$

Serão necessários os seguintes resultados auxiliares.

Lema: (Riemann-Lebesgue)

Se $f \in C_p([-a, b])$ então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos kx dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} kx dx = 0$$

Prova: Supondo que f seja contínua $[a, b]$. Seja $h = \pi/k$ com k suficientemente grande de modo que

$$a < a+h < b-h < b$$

Neste caso, tem-se que

$$\int_a^b f(x) \cos kx dx = \int_a^{a+h} f(x) \cos kx dx + \int_{a+h}^b f(x) \cos kx dx = \int_a^{a+h} f(x) \cos kx dx - \int_a^{b-h} f(x+h) \cos kx dx$$

Tem-se também que

$$\int_a^b f(x) \cos kx dx = \int_a^{b-h} f(x) \cos kx dx + \int_{b-h}^b f(x) \cos kx dx$$

Adicionando-se membro a membro as duas últimas igualdades, obtém-se

$$2 \int_a^b f(x) \cos kx dx = \int_a^{a+h} f(x) \cos kx dx + \int_{b-h}^b f(x) \cos kx dx + \int_a^{b-h} [f(x) - f(x+h)] \cos kx dx$$

Se f é contínua em $[a, b]$ ela é limitada, logo existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ em $[a, b]$. Portanto,

$$2 \left| \int_a^b f(x) \cos kx dx \right| \leq 2Mh + \int_a^{b-h} |f(x) - f(x+h)| dx$$

Além disso, a continuidade de f no compacto $[a, b]$ também implica que na sua continuidade uniforme em $[a, b]$. Consequentemente, fixado $\lambda > 0$ existe k_λ tal que para todo $k > k_\lambda$ e todo $x \in [a, b]$ tem-se que

$$\left| f\left(x + \frac{\pi}{k}\right) - f(x) \right| < \lambda \quad (\text{a})$$

Lembrando que $h = \pi/k$ conclui-se que

$$\left| \int_a^b f(x) \cos kx dx \right| \leq \frac{M\pi}{k} + \frac{b-a}{2} \lambda$$

Então dado $\varepsilon > 0$ seja $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\lambda < \varepsilon/(b-a)$ e k_λ tal que para $k > k_\lambda$ seja válida a desigualdade (a) e também se tenha $(M\pi)/k < \varepsilon/2$. Desse modo, conclui-se que para cada $\varepsilon > 0$, existe k_ε tal que para todo $k > k_\varepsilon$ resulta

$$\left| \int_a^b f(x) \cos kx dx \right| < \varepsilon$$

O que prova uma parte do lema no caso contínuo.

Supondo agora f contínua no intervalo aberto $]a, b[$. Neste caso não se poderá usar a continuidade uniforme. Entretanto, como $f \in C_p([-a, b])$ ela possui os limites laterais $f(a^+)$, $f(b^-)$ finitos. Portanto a função f^* , extensão de f ao intervalo fechado $[a, b]$ definida por

$$f^*(x) = \begin{cases} f(a^+), & \text{se } x = a \\ f(x), & a < x < b \\ f(b^-), & \text{se } x = b \end{cases}$$

é contínua no compacto $[a, b]$. Logo, pela primeira parte, vale o lema para f^* . Como as integrais de $f(x) \cos kx$ e $f^*(x) \cos kx$ são iguais em $[a, b]$, obtém-se a mesma conclusão também neste caso.

Finalmente para concluir a primeira parte no caso de $f \in C_p([-a, b])$, sejam $x_0 < \dots < x_n$ os pontos de descontinuidade de f . A restrição f_i de f a cada um dos intervalos abertos $]x_{i-1}, x_i[$ se encontra nas condições do caso acima. Logo, o lema é válido para as f_i 's ou seja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x) \cos kx dx = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Completando assim a demonstração da primeira parte do lema. A segunda parte é análoga. \square

Lema 1: Para todo x tal que $\text{sen}(x/2) \neq 0$ tem-se que

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})x}{2 \text{sen} \frac{x}{2}}$$

Prova: Como

$$2 \text{sen } p \cos q = \text{sen}(p+q) - \text{sen}(p-q).$$

Fazendo $q=kx$, $p=x/2$, obtemos

$$2 \cos kx \text{sen}(x/2) = \text{sen}(k + \frac{1}{2})x - \text{sen}(k - \frac{1}{2})x.$$

Somando k de 1 até n , resulta

$$2 \text{sen}(x/2) \sum_{k=1}^n \cos kx = \text{sen}(n + \frac{1}{2})x - \text{sen} \frac{x}{2}.$$

O que conclui a prova. \square

OBS: Quando $x=0$ tem-se que

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{1}{2} + n,$$

e como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(n + 1/2)x}{2 \text{sen} x/2} = n + \frac{1}{2},$$

Obtem-se a validade para todo x real.

Lema 2: (Dirichlet)

Seja $f \in C_p([- \pi, \pi])$. Então a soma $S_n(x)$ dos n primeiros termos da série de Fourier de f pode ser dada por

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\text{sen}(n + 1/2)(t-x)}{2 \text{sen}(t-x)/2} dt, \quad \forall x \in [- \pi, \pi].$$

Prova: De fato, tem-se que

$$S_n(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi}{L} y + b_k \text{sen} \frac{k\pi}{L} y \right)$$

Fazendo a mudança $x = \pi y / L$ que leva $-l < y < L$ em $- \pi < x < \pi$, obtem-se que

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Substituindo os coeficientes de Fourier a_n, b_n chega-se a

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t-x) dt$$

Ou seja

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right) dt \quad \square$$

Agora estamos em condições de demonstrar o **Teorema de Fourier-Riemann**.

Prova: Conforme vimos, podemos assumir $L = \pi$. Neste caso,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\text{sen}(n+1/2)(t-x)}{2 \text{sen}(t-x)/2} dt .$$

Fazendo a mudança $s = t - x$ na integral de Dirichlet, obtem-se

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds$$

Onde $D_n(s)$ é o **núcleo de Dirichlet**

$$D_n(s) = \frac{\text{sen}(n+1/2)s}{2 \text{sen}(s/2)} .$$

Integrando sobre $[-\pi, \pi]$ obtem-se

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(s) ds = 1 .$$

Decompondo o intervalo em $[-\pi, 0]$ e $[0, \pi]$ e observando que $D_n(-s) = D_n(s)$ resulta que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(s) ds = \frac{1}{2} .$$

De modo que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+s) D_n(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds$$

Então, basta provar que a primeira parcela converge para $\frac{1}{2} f(x^-)$ e a segunda para $\frac{1}{2} f(x^+)$.

De fato, é suficiente provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x+s) - f(x^-)] D_n(s) ds = 0 ,$$

e que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+s) - f(x^+)] D_n(s) ds = 0 .$$

Como a demonstração dos dois limites é análoga, demonstraremos apenas a validade do segundo, isto é provaremos que se f possui derivadas laterais finitas no ponto x , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+s) - f(x^+)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})s}{2 \sin(s/2)} ds = 0 .$$

De fato, seja a função g definida em $]0, \pi]$ por

$$g(s) = \frac{f(x+s) - f(x^+)}{2 \sin(s/2)} .$$

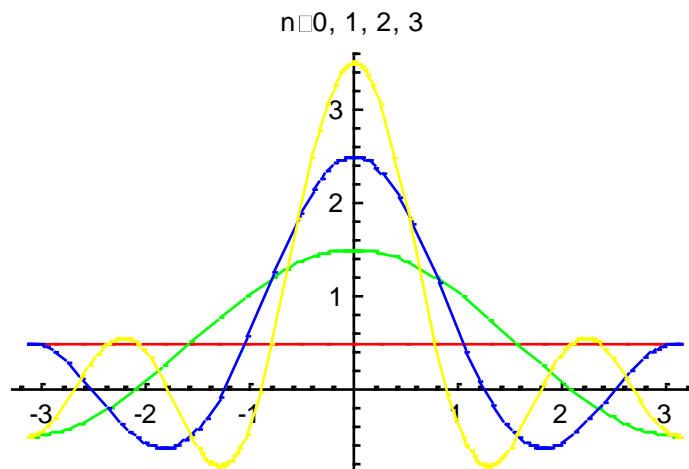
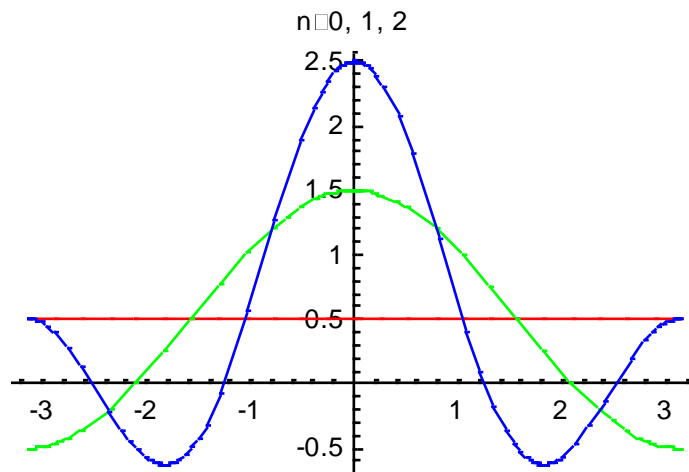
Como x é um ponto onde existem as derivadas laterais de f , tem-se que

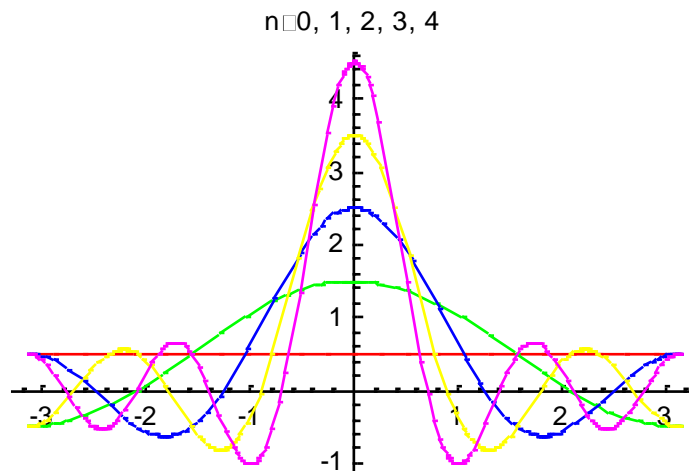
$$\lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(x+s) - f(x^+)}{s} \cdot \frac{s/2}{\sin(s/2)} = f'(x^+) .$$

Conclui-se que g é contínua por partes em $[0, \pi]$. Portanto, pelo Lema de Riemann-Lebesgue tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+s) - f(x^+)] D_n(s) ds = 0 . \quad \square$$

OBS: Núcleos de Dirichlet $D_n(s)$ em $[-\pi, \pi]$:





Corolário: Se f for derivável em cada ponto de $]-\pi, \pi[$ então sua série de Fourier convergirá para cada $f(x)$ para cada $x \in]-\pi, \pi[$.

Tendo em vista que nas aplicações das séries de Fourier às EDP's necessitar-se-á derivar e integrar termo a termo tais séries, será obtido um teorema sobre derivação termo a termo e outro sobre convergência uniforme.

Teorema: Seja f derivável em $[-\pi, \pi]$ com derivada contínua, sendo que $f(-\pi) = f(\pi)$. Então, em cada ponto x de $]-\pi, \pi[$ onde existe $f''(x)$, a série de Fourier de f , $S[f]$, é derivável e vale a regra da derivação termo a termo.

Prova: Como f' é contínua em $[-\pi, \pi]$ obtem-se pelo teorema de Fourier-Riemann que $S[f]$ converge em cada ponto x de $[-\pi, \pi]$ para $f(x)$, ou seja

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Também pelo fato de f' ser contínua e existir f'' em cada ponto de $[-\pi, \pi]$, o mesmo teorema assegura que a série de Fourier de f' , $S[f']$, converge para $f'(x)$ para cada x de $[-\pi, \pi]$, ou seja

$$f'(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \operatorname{sen} nx)$$

onde

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx, \quad n \geq 0$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \operatorname{sen} nx dx, \quad n \geq 1$$

Integrando por partes e usando que $f(-\pi) = f(\pi)$ obtem-se que

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} (f(x) \cos kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx = \frac{\cos k\pi}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] + kb_k = kb_k, \quad k \geq 0.$$

Analogamente, obtem-se que

$$\beta_k = -ka_k, k \geq 1 .$$

Substituindo, conclui-se que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \operatorname{sen} nx + nb_n \operatorname{cos} nx) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{cos} nx + b_n \operatorname{sen} nx)'. \quad \square$$

Antes de obtermos o teorema sobre convergência uniforme e absoluta, obteremos duas desigualdades que serão úteis não só na prova do teorema mas também em outras situações.

Lema 3: (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Sejam $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ números reais. Então tem-se que

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) .$$

Prova: Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 .$$

Tomando

$$x = \frac{|a_k|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} , \quad y = \frac{|b_k|}{\sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}}$$

Somando de $k=1$ até $k=n$, obtem-se a desigualdade. \square

Lema 4: (Desigualdade de Bessel)

Seja f uma função real cujo quadrado é integrável em $[-\pi, \pi]$ e a_n, b_n os coeficientes de Fourier de f . Então, para todo número natural n vale a desigualdade

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx .$$

Prova: Dado $n \in \mathbb{N}$ tem-se que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \operatorname{cos} kx + b_k \operatorname{sen} kx) \right) \right]^2 dx \geq 0$$

ou seja

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[f^2(x) - a_0 f(x) + \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 - 2 \left(f(x) - \frac{a_0}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^n (a_k \operatorname{cos} kx + b_k \operatorname{sen} kx) \right) + \left(\sum_{k=1}^n (a_k \operatorname{cos} kx + b_k \operatorname{sen} kx) \right)^2 \right] dx \geq 0$$

Utilizando-se as relações de ortogonalidade, obtem-se, após desenvolver o quadrado do último termo, que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[f^2(x) + (a_0/2)^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 \cos^2 kx + b_k^2 \sin^2 kx) - a_0 f(x) - 2 \sum_{k=1}^n (a_k f(x) \cos kx + b_k f(x) \sin kx) \right] dx \geq 0$$

Ou seja

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{\pi}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} (a_k^2 \cos^2 kx + b_k^2 \sin^2 kx) dx - a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} (a_k f(x) \cos kx + b_k f(x) \sin kx) dx$$

De modo que

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

Como $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário, conclui-se a prova. \square

Teorema: (Dirichlet)

Seja f contínua, periódica, período 2π , derivável com $f' \in C_p([-\pi, \pi])$. Se $f(-\pi) = f(\pi)$, então a série de Fourier de f converge uniformemente e absolutamente em $[-\pi, \pi]$.

Prova: Tem-se que

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$S[f'](x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

Como $f' \in C_p([-\pi, \pi])$ integrando-se por partes obtém-se que

$$\alpha_n = nb_n, n \geq 0$$

$$\beta_n = -na_n, n \geq 1$$

Por outro lado, pela desigualdade de Bessel, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

Além disso,

$$\sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)^{1/2} = \sum_{k=1}^n [k^{-2} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)]^{1/2}, \forall n \geq 1.$$

O que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, implica em

$$\sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n k^{-2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right)^{1/2}, \forall n \geq 1.$$

De modo que, aplicando a desigualdade de Bessel nos coeficientes α_k, β_k e levando em conta que a série 2-harmônica é convergente, conclui-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < +\infty .$$

Sendo assim ,como se tem

$$|a_n \cos nx + b_n \sen nx|^2 \leq 2(a_n^2 + b_n^2), \forall n \geq 1 .$$

Os termos da série de Fourier $S[f](x)$ são dominados em valor absoluto pelos termos de uma série convergente de números positivos. Logo, pelo teste M de Weierstrass, $S[f](x)$ converge uniformemente e absolutamente. \square

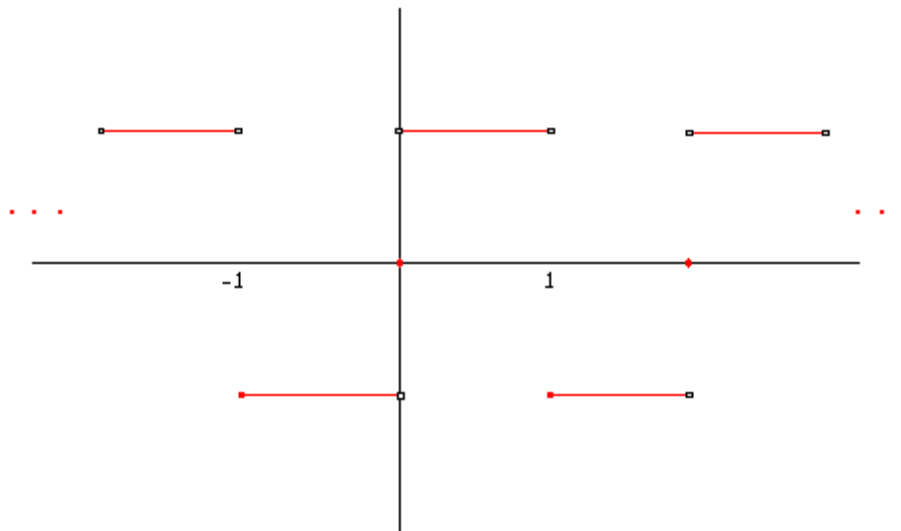
Cálculo da série de Fourier de algumas funções:

Exemplo 1: Obtenha a série de Fourier da função sinal de x

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Restrita ao intervalo $[-1,1[$ e estendida periodicamente a toda reta.

O gráfico da extensão periódica sign x , de $\text{sign } x$, a toda reta com período $T=2$ e $\text{sign}(-1) = -1$ é



Análise: tem-se $L = 1$ e f ímpar, logo

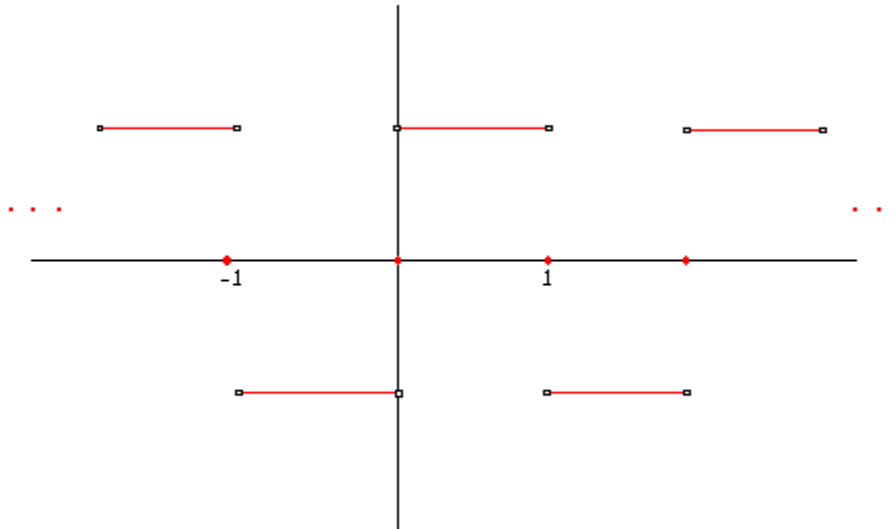
$$a_n = 0, \forall n \geq 0 \text{ e } b_n = 2 \int_0^1 \sen n\pi x dx = 2 \left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{(-1)^n}{n\pi} \right), \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_{2k} = 0 \\ b_{2k-1} = 4 / (2k-1)\pi, k \geq 1 \end{cases}$$

Síntese: A série de Fourier sign x é dada por

$$S[\text{sign}](x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \text{sen}(2n-1)\pi x$$

Gráfico de $S[\text{sign}](x)$



De modo que, $S[\text{sign}](x) \neq \text{sign } x$. Tomando a n-ésima soma parcial

$$S_N[\text{sign}](x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\text{sen}(2n-1)\pi x}{(2n-1)}$$

Verificamos que
Gráfico de $S_1[\text{sign}]$:

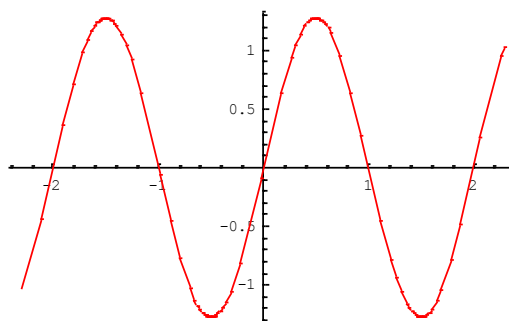


Gráfico de $S_2[\text{sign}]$:

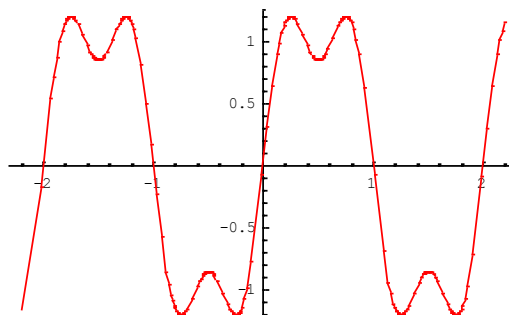


Gráfico de S_3 :

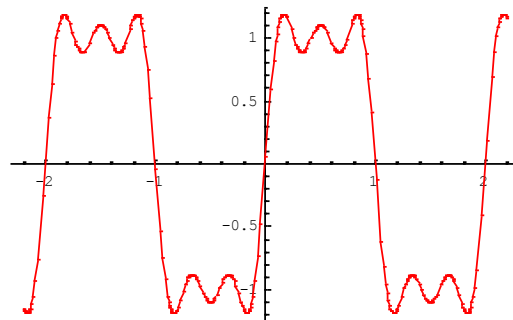


Gráfico de $S_6[\text{sign}]$:

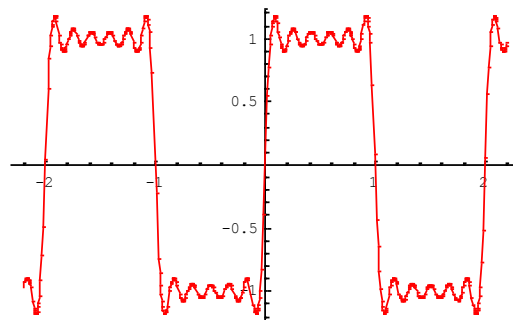
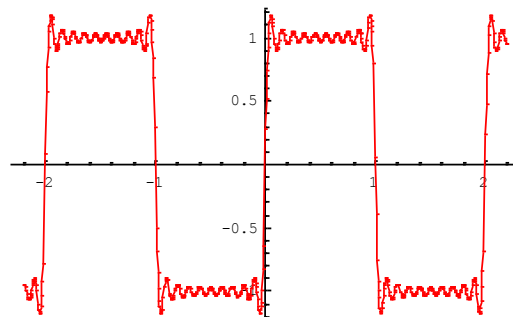


Gráfico de $S_{10}[\text{sign}]$:



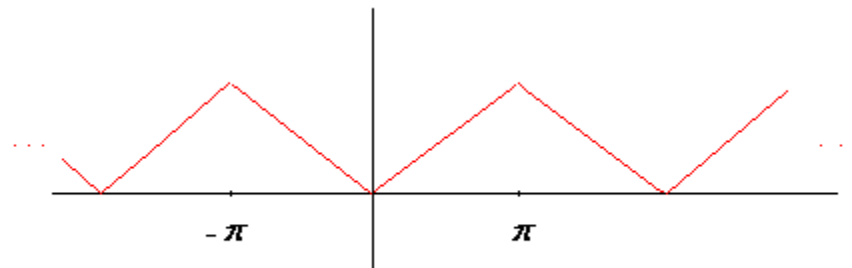
OBS: Com a série acima podemos obter em $x=2$ um resultado não trivial da teoria analítica dos números conhecido como a série de Leibniz para $\pi/4$.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Exemplo 2: Obter a série de Fourier da função *onda triangular* :

$$\Lambda(x) = \begin{cases} |x|, & -\pi < x < \pi \\ \Lambda(x+2\pi) = \Lambda(x) \end{cases}$$

Gráfico de Λ :



Tem-se que $L = 2\pi$ e Λ função par em $]-\pi, \pi[$, sendo assim

$$b_n = 0, \forall n \geq 1, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi \quad \text{e} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^\pi$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n = 2k-1, \forall k \geq 1 \end{cases}$$

De modo que,

$$S[\Lambda](x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x$$

Como Λ é contínua tem-se que $S[\Lambda](x) = \Lambda(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Definindo

$$S_N[\Lambda](x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x$$

Tem-se que

Gráfico de $S_1[\Lambda]$:

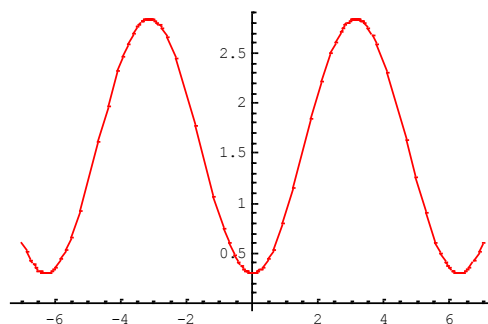


Gráfico de $S_2[\Lambda]$:

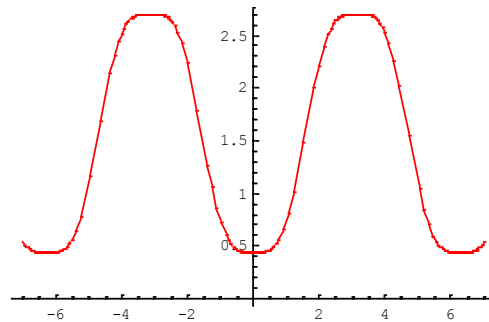


Gráfico de $S_3[\Lambda]$:

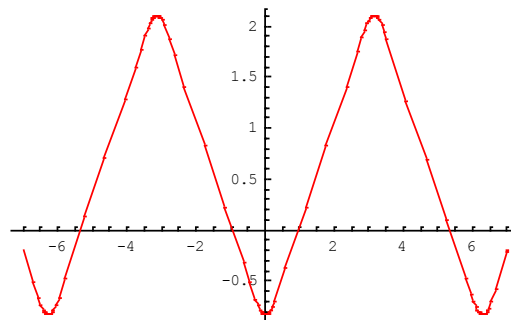
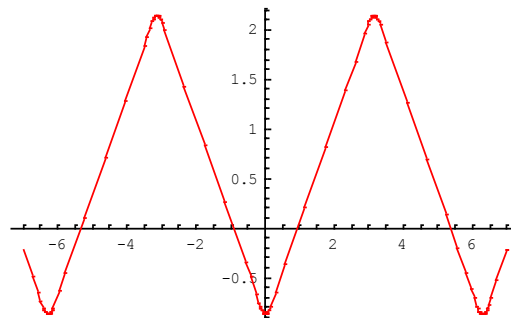


Gráfico de $S_4[\Lambda]$:



OBS: Pode-se perceber que no caso da onda triangular as somas parciais de sua série de Fourier convergem rapidamente para ela. Já no caso da extensão periódica da função sinal, $\text{sign } x$, a qualidade da convergência é muito inferior, sendo que por maior que seja o número de termos na soma parcial, não se consegue reproduzir o gráfico de $\text{sign } x$, pois sempre se obtém uma função contínua! Os pontos de descontinuidade de salto criam oscilações conhecidas como **fenômeno de Gibbs** (vide Djairo; Análise de Fourier e EDP, pg. 93).

Forma complexa da série de Fourier:

Pela fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

De modo que,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)e^{in\pi x/L} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)e^{-in\pi x/L} &= \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)\left(\cos \frac{n\pi x}{L} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\right) + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)\left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

Então, definindo

$$c_n \triangleq \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n}{2} - i \frac{b_n}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi}{L} x - i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

Tem-se que

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx.$$

Sendo que

$$c_0 \triangleq \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

Obtem-se que se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for periódica de período $2L$, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, então a série de Fourier de f pode ser representada na **forma complexa**:

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

Exemplo: Seja $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = x$. Expandir f como uma série de senos.

Neste caso precisa-se “rebater” f de forma ímpar em $[-\pi, \pi]$ e estender periodicamente a toda reta. Seja a extensão

$$f^*(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \leq \pi \\ f^*(x+2\pi) = f^*(x) \end{cases}$$

Tem-se que

$$a_n = 0, \forall n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \operatorname{sen} nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x d\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) = \frac{2}{\pi} \left[x \frac{-\cos nx}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

De modo que,

$$S[f^*](x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen } nx .$$

Como f^* é contínua em $[0, \pi[$, então obtemos

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen } nx \quad , 0 \leq x < \pi .$$

OBS: No ponto $x = \pi$, tem-se que $S[f^*](\pi) \neq f^*(\pi)$.

Exemplo: Seja $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x$. Expandir em série de cossenos.

Neste caso, é preciso “rebater” f de forma par em $[-\pi, \pi]$ e estender periodicamente a toda reta. Seja a extensão

$$f^*(x) = \begin{cases} |x|, & -\pi \leq x \leq \pi \\ f^*(x+2\pi) = f^*(x) \end{cases}$$

Tem-se que

$$b_n = 0, \forall n \geq 1$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nxdx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{4}{n^2 \pi}, & n = 2k - 1 \end{cases}$$

De modo que,

$$S[f^*](x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} .$$

Portanto,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad , 0 \leq x \leq \pi .$$

Exemplo: Seja $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x$. Expandir como série de cossenos e senos.

Neste caso, f não deve ser “rebatida” nem como função par nem como função ímpar. Definindo por exemplo

$$f^*(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi < x \leq 0 \\ f^*(x+2\pi) = f^*(x) \end{cases}$$

Tem-se que

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nxdx = \frac{[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{2}{n^2 \pi}, & n = 2k - 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \operatorname{sen} nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \forall n \geq 1.$$

De modo que,

$$S[f^*](x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx.$$

Como f^* é contínua em $[0, \pi]$, obtem-se que

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx, 0 \leq x < \pi.$$

Agora podemos retornar ao problema que motivou a criação e desenvolvimento das séries de Fourier. Consideraremos cada uma das possíveis condições de fronteira homogêneas.

Tipo I: Barra com extremidades mantidas à 0°C :

Matematicamente o problema consiste em obter uma função $u(x, t)$, definida em $0 \leq x \leq L$ e $0 \leq t < \infty$ satisfazendo o seguinte

$$PVIF : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, (x, t) \in]0, L[\times]0, +\infty[\\ u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Pelo método da separação das variáveis fomos levados ao seguinte candidato a solução

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \alpha^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

Onde os coeficientes b_n devem satisfazer

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, 0 \leq x \leq L.$$

Portanto, não há escolha, os coeficientes b_n devem ser os coeficientes de Fourier da extensão f^* ímpar periódica, período $2L$, de f a toda reta. De modo que,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^*(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx.$$

OBS: Portanto, é necessário que f seja contínua em $[0, L]$, $f(0) = f(L) = 0$ e $f' \in C_p([0, L])$.

Tipo II: Barra termicamente isolada nas extremidades:
Matematicamente tem-se o seguinte

$$PVI : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} , (x,t) \in]0, L[\times]0, +\infty[\\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) , 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Pelo método da separação de variáveis obtém-se o seguinte sistema de EDO's;

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 , 0 < x < L \\ T'(t) - \lambda \alpha^2 T(t) = 0 , 0 < t < \infty \end{cases}$$

Com a seguinte condição de fronteira

$$X'(0) = X'(L) = 0 .$$

Com isso somos levados ao seguinte problema espectral (**problema de Sturm-Liouville**)

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 , 0 < x < L \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

Que possui as seguintes possibilidades;

$\lambda > 0$: Neste caso, a solução geral é dada por

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} .$$

Impondo as condições de fronteira obtém-se

$$\begin{cases} c_1 \sqrt{\lambda} - c_2 \sqrt{\lambda} = 0 \\ c_1 \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}L} - c_2 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = c_2 \Rightarrow (c_1 \neq 0 \Leftrightarrow e^{2\sqrt{\lambda}L} = 1) ?!$$

Então $c_1 = c_2 = 0$ donde $X \equiv 0$.

$\lambda = 0$: Neste caso,

$$X(x) = c_1 x + c_2 .$$

Impondo as condições de fronteira obtém-se

$$X'(0) = X'(L) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0, c_2 \in \mathbb{R} .$$

De modo que, $X \equiv c$.

$\lambda < 0$: Neste caso, $\lambda = -\sigma^2, \sigma \neq 0$ e a solução geral é dada por

$$X(x) = c_1 \cos \sigma x + c_2 \sin \sigma x .$$

Impondo as condições de fronteira obtém-se

$$\begin{cases} X'(0) = \sigma c_2 = 0 \\ X'(L) = -\sigma c_1 \sin \sigma L + \sigma c_2 \cos \sigma L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sigma c_1 \sin \sigma L = 0 \Leftrightarrow \sigma L = n\pi, n \in \mathbb{Z} .$$

De modo que, se obtém uma infinidade de (enumerável) de soluções $X_n(x)$, as auto-funções do problema espectral, cada uma associada a um respectivo autovalor dado por;

$$\lambda_n = -\sigma_n^2 = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, n = \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow n = 1, 2, \dots$$

OBS: Então o caso $\lambda = 0$ é um autovalor com auto-função $X_0 \equiv 1$.

Portanto o auto-sistema do problema espectral é dado por

$$\Lambda = \left\{ \lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}; X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{L} x \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Logo, pelo Princípio da Superposição Generalizado, o candidato a solução é dado por

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L} \cos \frac{n\pi}{L} x, 0 \leq x \leq L, t \geq 0.$$

Onde os coeficientes a_n devem satisfazer

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x, 0 \leq x \leq L.$$

Portanto, os a_n devem ser os coeficientes de Fourier da extensão f^* par, periódica, período $2L$, de f a toda reta, ou seja

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^*(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, n \geq 0.$$

OBS: Novamente, é necessário que f seja contínua em $[0, L]$ e $f' \in C_p([0, L])$.

Tipo III: Barra com uma extremidade termicamente isolada e a outra mantida a 0°C :
Matematicamente tem-se o seguinte

$$PVIF : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, (x, t) \in]0, L[\times]0, +\infty[\\ u(0, t) = u_x(L, t) = 0, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Pelo método da separação das variáveis obtém-se o seguinte sistema de EDO's

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, 0 < x < L \\ T'(t) - \lambda \alpha^2 T(t) = 0, 0 < t < \infty \end{cases}$$

Com a seguinte condição de fronteira

$$X(0) = X'(L) = 0.$$

E, portanto o seguinte problema espectral;

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, 0 < x < L \\ X(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

Que apresenta as seguintes possibilidades;

$\lambda > 0$: Solução geral: $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$

Impondo as condições de fronteira, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \sqrt{\lambda}c_1 - \sqrt{\lambda}c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ 2\sqrt{\lambda}c_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0 .$$

$\lambda = 0$: Solução geral: $X(x) = c_1 x + c_2$

Impondo as condições de fronteira obtém-se

$$\begin{cases} X(0) = c_2 = 0 \\ X'(L) = c_1 = 0 \end{cases}$$

$\lambda < 0$: Neste caso, $\lambda = -\sigma^2, \sigma \neq 0$ e a solução geral é dada por $X(x) = c_1 \cos \sigma x + c_2 \sin \sigma x$.

Impondo as condições de fronteira obtemos

$$\begin{cases} X(0) = c_1 = 0 \\ X'(L) = -\sigma c_1 \sin \sigma L + \sigma c_2 \cos \sigma L = 0 \end{cases} \Rightarrow c_2 \cos \sigma L = 0 \underset{c_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} \sigma L = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sigma_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, n \geq 1$$

De modo que, o auto-sistema do problema espectral é dado por

$$\Lambda = \left\{ -\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2}; \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right\}_{n=1}^{\infty} .$$

Pelo Princípio da Superposição Generalizado, o candidato a solução é dado por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha^2 (2n-1)^2 \pi^2 t / 4L^2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x .$$

Onde os coeficientes b_n devem satisfazer

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x, 0 \leq x \leq L .$$

OBS: Como antes, f deve ser estendida como uma função ímpar, só que dessa vez, por causa de aparecer $2L$ no lugar de L no denominador, o período tem que ser $4L$. Então, precisamos definir f em $]L, 2L[$ de modo que a série de Fourier desse prolongamento de f não contenha senos com argumentos da forma $(n\pi x / 2L)$ com n par.

Definindo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ f(2L-x), & L \leq x \leq 2L \end{cases}$$

Ou seja, \tilde{f} é o rebatimento do gráfico de f , para $[L, 2L]$, simétrico em relação a reta vertical $x = L$.

De modo que, os coeficientes b_n devem ser os coeficientes de Fourier da extensão ímpar, periódica, período $4L$, de \tilde{f} a toda reta.

$$\tilde{f}^*(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & 0 \leq x \leq 2L \\ -\tilde{f}(x), & -2L < x \leq 0 \\ \tilde{f}^*(x+4L) = \tilde{f}^*(x) \end{cases}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2L} \int_{-2L}^{2L} \tilde{f}^*(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2L} x dx = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2L} x dx = \\ &= \frac{1}{L} \left[\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2L} x dx + \int_L^{2L} f(2L-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2L} x dx \right] = \\ &= \frac{1}{L} \left[\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2L} x dx - \int_L^0 f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2L} (2L-y) dy \right] = \\ &= \frac{1}{L} \left[\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2L} x dx + \int_0^L f(x) \left(\operatorname{sen} n\pi \cos \frac{n\pi}{2L} x - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2L} x \cos n\pi \right) dx \right] = \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \left[\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2L} x + (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2L} x \right] dx = \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi}{2L} x dx, & n = 2k-1 \end{cases} \end{aligned}$$

OBS: É necessário que f seja contínua em $[0, L]$ e $f' \in C_p([0, L])$, pois assim $\tilde{f} \in C([0, 2L])$, $\tilde{f}' \in C_p([0, 2L])$.

Tipo IV: Barra com uma extremidade mantida a 0°C e a outra extremidade satisfazendo a condição do fluxo d calor através dela ser proporcional, com constante de proporcionalidade $\beta > 0$, a diferença de temperatura entre o meio (suposto a 0°C) e a respectiva extremidade; Matematicamente tem-se o seguinte

$$PVI\text{F} : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & , (x, t) \in]0, L[\times]0, +\infty[\\ u_x(0, t) + \beta u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & , 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Pelo método da separação das variáveis obtém-se o seguinte problema espectral

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & , 0 < x < L \\ X'(0) + \beta X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Que apresenta as seguintes possibilidades;

$\lambda > 0$: Solução Geral; $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

Impondo as condições de fronteira obtém-se o sistema

$$\begin{cases} (\sqrt{\lambda} + \beta)c_1 - (\sqrt{\lambda} - \beta)c_2 = 0 \\ e^{\sqrt{\lambda}L}c_1 + e^{-\sqrt{\lambda}L}c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = \frac{(\sqrt{\lambda} - \beta)}{(\sqrt{\lambda} + \beta)}c_2 \Leftrightarrow c_2 \left[\frac{(\sqrt{\lambda} - \beta)}{(\sqrt{\lambda} + \beta)} e^{\sqrt{\lambda}L} + e^{-\sqrt{\lambda}L} \right] = 0$$

Como não interessa $c_2 = 0$ então

$$\left[\frac{(\sqrt{\lambda} - \beta)}{(\sqrt{\lambda} + \beta)} e^{\sqrt{\lambda}L} + e^{-\sqrt{\lambda}L} \right] = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}L} + e^{-\sqrt{\lambda}L}) + \beta(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tgh} \sqrt{\lambda}L = \frac{\sqrt{\lambda}}{\beta}$$

De modo que, somente para $\beta > 1$ é que se obtém um único auto-valor e portanto uma única auto-função. Neste caso, não se terá como satisfazer uma condição inicial $f(x)$ arbitrária!

$\lambda = 0$: Solução Geral; $X(x) = c_1 x + c_2$.

Impondo as condições de fronteira obtém-se o sistema

$$\begin{cases} c_1 + \beta c_2 = 0 \\ Lc_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \beta L = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{L}$$

Neste caso, obtém-se novamente uma única auto-função $X_0(x) = x - L$.

$\lambda < 0$: Neste caso, $\lambda = -\sigma^2, \sigma \neq 0$ e a solução geral é dada por $X(x) = c_1 \cos \sigma x + c_2 \operatorname{sen} \sigma x$.

Impondo as condições de fronteira obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \beta c_1 + \sigma c_2 = 0 \\ c_1 \cos \sigma L + c_2 \operatorname{sen} \sigma L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \sigma L = \frac{\sigma}{\beta} \quad (*)$$

De modo que, os auto-valores $\lambda_n = -\sigma_n^2, n \geq 1$, são as raízes não-nulas da equação transcendente (*) e as respectivas auto-funções são dadas por

$$X_n(x) = \cos \sigma_n x - \frac{\beta}{\sigma_n} \operatorname{sen} \sigma_n x, n \geq 1.$$

OBS: Os auto-valores são simétricos em relação à origem.

Portanto, o candidato natural a solução é dado por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\alpha^2 \sigma_n^2 t} \left(\cos \sigma_n x - \frac{\beta}{\sigma_n} \operatorname{sen} \sigma_n x \right), (x, t) \in [0, L] \times]0, +\infty[.$$

Com os coeficientes satisfazendo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\cos \sigma_n x - \frac{\beta}{\sigma_n} \operatorname{sen} \sigma_n x \right), 0 \leq x \leq L. (**)$$

OBS: A série (**) pode ser interpretada como uma *série de Fourier generalizada*.

Supondo que a série (**) pode ser integrada termo a termo (por exemplo, se a convergência for uniforme) pode-se obter os coeficientes c_n de modo análogo ao empregado na série de Fourier, bastando para isso estabelecer certas relações de ortogonalidade.

Relações de ortogonalidade:

Observando que

$$X_n'' + \sigma_n^2 X_n = 0 \quad , \quad X_m'' + \sigma_m^2 X_m = 0 \quad , \quad \forall m, n \geq 1 .$$

Obtem-se que

$$(\sigma_n^2 - \sigma_m^2) X_m X_n = X_n X_m'' - X_m X_n'' \quad , \quad \forall m, n \geq 1 .$$

Então

$$\begin{aligned} (\sigma_n^2 - \sigma_m^2) \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx &= \int_0^L [X_n X_m'' - X_m X_n''] dx = \int_0^L X_n dX_m' - \int_0^L X_m dX_n' \\ &= X_n(x) X_m'(x) \Big|_0^L - X_m(x) X_n'(x) \Big|_0^L \end{aligned}$$

Usando as condições de fronteira

$$X_n'(0) + \beta X_n(0) = X_n(L) = 0, \quad \forall n \geq 1$$

Obtem-se que

$$(\sigma_n^2 - \sigma_m^2) \int_0^L X_n(x) X_m(x) dx = -X_n(0) X_m'(0) + X_n'(0) X_m(0) = 0, \quad \forall m, n \geq 1 .$$

Ou seja se $m \neq n$ então

$$\int_0^L X_n(x) X_m(x) dx = 0 \quad , \quad \forall m, n \geq 1 .$$

Por outro lado, se $m = n$, então

$$\sigma_n^2 \int_0^L X_n^2(x) dx = - \int_0^L X_n(x) X_n''(x) dx = - (X_n(x) X_n'(x)) \Big|_0^L + \int_0^L (X_n'(x))^2 dx \quad , \quad \forall n \geq 1$$

Como

$$\sigma_n X_n(x) = \sigma_n \cos \sigma_n x - \beta \sin \sigma_n x \Rightarrow X_n'(x) = -\sigma_n \sin \sigma_n x - \beta \cos \sigma_n x$$

Então

$$\sigma_n^2 X_n^2(x) + (X_n'(x))^2 = \sigma_n^2 + \beta^2 \quad , \quad \forall n \geq 1 .$$

O que resulta em no seguinte sistema

$$\begin{cases} \sigma_n^2 \int_0^L X_n^2(x) dx + \int_0^L (X_n'(x))^2 dx = L(\sigma_n^2 + \beta^2) \\ \sigma_n^2 \int_0^L X_n^2(x) dx - \int_0^L (X_n'(x))^2 dx = -(X_n(x) X_n'(x)) \Big|_0^L \end{cases} \Rightarrow 2\sigma_n^2 \int_0^L X_n^2(x) dx = L(\sigma_n^2 + \beta^2) + X_n(0) X_n'(0)$$

Entretanto, da expressão para as auto-funções obtem-se que $X_n(0) = 1, X_n'(0) = -\beta, \forall n \geq 1$.

Então

$$\int_0^L X_n^2(x) dx = \frac{L(\sigma_n^2 + \beta^2) - \beta}{2\sigma_n^2} \quad , \quad \forall n \geq 1 .$$

De modo que, se

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m X_m(x) \quad , 0 \leq x \leq L$$

Então

$$\int_0^L f(x) X_n(x) dx = c_n \int_0^L X_n^2(x) dx \quad , \forall n \geq 1$$

Com

$$c_n = \frac{2\sigma_n^2}{L(\sigma_n^2 + \beta^2) - \beta} \int_0^L f(x) X_n(x) dx \quad , \forall n \geq 1$$

O que nos dá o seguinte candidato a solução

$$u(x,t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha^2 \sigma_n^2 t} \frac{\int_0^L f(x) [\sigma_n \cos \sigma_n x - \beta \operatorname{sen} \sigma_n x] dx}{L(\sigma_n^2 + \beta^2) - \beta} (\sigma_n \cos \sigma_n x - \beta \operatorname{sen} \sigma_n x) \quad , 0 \leq x \leq L, t > 0$$

2.4 Problema de Sturm-Liouville

Na dedução da equação da difusão do calor obtivemos a seguinte equação geral

$$c \rho u_t = \frac{\partial}{\partial x} (k u_x) + F(x, t, u)$$

Onde, no caso do material da barra não ser homogêneo, tem-se que

$$c = c(x), \rho = \rho(x), k = k(x)$$

Para aplicação do método de separação de variáveis exigiu-se que a equação fosse linear. De modo que, é necessário que se tenha

$$F(x, t, u) = f(x, t) + q(x)u$$

Além disso, as condições de fronteira tem que ser lineares e homogêneas, ou seja,

$$\begin{aligned} au(0, t) + bu_x(0, t) &= 0 \\ cu(L, t) + du_x(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

As quais são dadas separadamente em cada um dos dois extremos da barra. Agora veremos o porque dessa exigência sobre as condições de fronteira.

Aplicando o método da separação das variáveis, ou seja, supondo

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

e substituindo na EDP, onde se denotou $r(x) = c(x)\rho(x)$, obtem-se que

$$r(x)X(x)T'(t) = [k(x)X'(x)]'T(t) + q(x)X(x)T(t)$$

Dividindo por $r(x)X(x)T(t)$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{[k(x)X'(x)]'}{r(x)X(x)} + \frac{q(x)}{r(x)}$$

De modo que, existe uma constante separadora λ que reduz a EDP ao seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{cases} [k(x)X'(x)]' + q(x)X(x) = \lambda r(x)X(x), 0 < x < L \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0, 0 < t < +\infty \end{cases}$$

Que produz o seguinte Problema Espectral:

$$\begin{cases} [k(x)X'(x)]' + q(x)X(x) = \lambda r(x)X(x), 0 < x < L \\ aX(0) + bX'(0) = 0, cX(L) + dX'(L) = 0 \end{cases}$$

Definição: Um **Problema de Sturm-Liouville** é um problema espectral com a seguinte estrutura:

$$\begin{cases} [k(x)\phi'(x)]' + q(x)\phi(x) = \lambda r(x)\phi(x), a < x < b \\ a_{11}\phi(a) + a_{12}\phi'(a) + a_{13}\phi(b) + a_{14}\phi'(b) = 0 \\ a_{21}\phi(a) + a_{22}\phi'(a) + a_{23}\phi(b) + a_{24}\phi'(b) = 0 \end{cases}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e o intervalo $]a,b[$ é limitado. Essas condições de fronteira são denominadas do tipo separada.

Definição: Um problema de Sturm-Liouville é **regular** se as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) $r(x), k(x), q(x) \in C([a, b])$.
- (ii) $r(x) > 0, k(x) > 0$ em $[a, b]$.

OBS: Um problema de Sturm-Liouville é **singular** quando pelo menos uma das duas condições acima não é satisfeita ou se $]a,b[$ não é limitado. As condições de fronteira num problema de Sturm-Liouville podem envolver simultaneamente os dois extremos.

Lema 5: (Identidade de Lagrange)

Definindo o operador diferencial linear

$$L[\phi] = -\frac{1}{r(x)} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{d\phi}{dx} \right) - \frac{q(x)}{r(x)} \phi$$

Então, dadas $\phi, \psi \in C^2([a, b])$ tem-se que

$$\int_a^b [L[\phi]\psi - \phi L[\psi]] r(x) dx = -(k(x)[\phi'(x)\psi(x) - \phi(x)\psi'(x)]) \Big|_a^b.$$

Prova: Tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_a^b L[\varphi]\psi r dx &= \int_a^b -((k\varphi)' + q\varphi)\psi dx = -\int_a^b (k\varphi)'\psi dx - \int_a^b q\varphi\psi dx \\
&= -(k\varphi'\psi)_a^b + \int_a^b k\varphi'\psi' dx - \int_a^b q\varphi\psi dx \\
&= -(k\varphi'\psi)_a^b + \left[(k\varphi\psi')_a^b - \int_a^b \varphi(k\psi') dx \right] - \int_a^b q\varphi\psi dx \\
&= -(k\varphi'\psi)_a^b + (k\varphi\psi')_a^b + \int_a^b -(\varphi(k\psi')' + q\varphi\psi) dx \\
&= -(k[\varphi'\psi - \varphi\psi'])_a^b + \int_a^b \varphi L[\psi] r dx
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_a^b [L[\varphi]\psi - \varphi L[\psi]] r dx = -(k[\varphi'\psi - \varphi\psi'])_a^b. \quad \square$$

OBS: Se φ, ψ satisfazem as condições de fronteira do tipo separada, então

$$\begin{aligned}
-(k(x)[\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)])_a^b &= -k(b)[\varphi'(b)\psi(b) - \varphi(b)\psi'(b)] + \\
&\quad + k(a)[\varphi'(a)\psi(a) - \varphi(a)\psi'(a)] \\
&= -k(b)\left[-\frac{c}{d}\varphi(b)\psi(b) + \frac{c}{d}\varphi(b)\psi(b)\right] + \\
&\quad + k(a)\left[-\frac{a}{b}\varphi(a)\psi(a) + \frac{a}{b}\varphi(a)\psi(a)\right] = 0
\end{aligned}$$

se $b, d \neq 0$.

Definição: Um problema de Sturm-Liouville regular é auto-adjunto se

$$(k(x)[\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)])_a^b = 0$$

$\forall \varphi, \psi \in C^2([a, b])$ que satisfazem as condições de fronteira do problema.

Definição: As condições de fronteira do tipo separada são denominadas **condições de fronteira auto-adjuntas**.

Definição: Dada uma função $r(x) > 0$ e contínua em $[a, b]$. Um produto interno em relação a função peso r no espaço vetorial $C([a, b])$ é dado por;

$$\langle \varphi, \psi \rangle_r = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)r(x)dx$$

OBS: Para um problema de Sturm-Liouville regular auto-adjunto tem-se que

$$\langle L[\varphi], \psi \rangle_r = \langle \varphi, L[\psi] \rangle_r$$

para todo par $\varphi, \psi \in C^2([a, b])$ satisfazendo as condições de fronteira.

Teorema de Sturm-Liouville:

Dado um problema de Sturm-Liouville regular auto-adjunto, tem-se que;

- (i) Todos auto-valores são reais.
- (ii) Se $X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}$ são auto-funções associadas aos auto-valores distintos λ_1, λ_2 , então X_{λ_1} e X_{λ_2} são ortogonais sobre $[a, b]$ em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$.
- (iii) Os auto-valores são todos simples, isto é, a cada auto-valor corresponde apenas uma auto-função linearmente independente. Além disso, eles formam uma sequência infinita crescente

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N < \dots, \text{ com } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

- (iv) Sejam X_1, X_2, \dots as auto-funções normalizadas, então dada $f \in C_p([a, b])$ com $f' \in C_p([a, b])$ vale a seguinte expansão

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x), \quad a < x < b$$

onde

$$c_n = \int_a^b f(x) X_n(x) r(x) dx = \langle f, X_n \rangle_r, \quad \forall n \geq 1.$$

OBS: Se f for contínua em $[a, b]$ então a série de Fourier generalizada converge para $f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

OBS: X_n é normalizada quando se tem

$$\int_a^b X_n^2(x) dx = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

2.4 Equação não-homogênea

O método da separação das variáveis pode ser empregado na resolução de EDP's lineares não-homogêneas. De fato, dado o seguinte

$$PVIF : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + F(x, t), & (x, t) \in]0, L[\times]0, +\infty[\\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & 0 < t < +\infty \\ u(x, 0) = f(x) & , 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Se tivéssemos $F \equiv 0$ a solução seria dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \text{sen} \frac{n\pi}{L} x, \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0.$$

Com os coeficientes b_n sendo os coeficientes de Fourier da extensão a toda reta, ímpar no intervalo $]-L, L]$, periódica, período $2L$, de f . Por esse motivo e por analogia com o método da variação dos parâmetros utilizado na teoria da EDO's lineares, tenta-se uma solução do tipo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

Substituindo na EDP obtem-se formalmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c'_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\alpha^2 \frac{\pi^2}{L^2} n^2\right) c_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x + F(x, t) \quad (*)$$

Supondo que para cada $t > 0$, $F(x, t)$ admite uma representação em série de Fourier de senos, ou seja

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \quad 0 < x < L, t > 0.$$

Então, substituindo em (*) e utilizando-se as relações de ortogonalidade, obtem-se a seguinte sequência de problemas de Cauchy:

$$\begin{cases} c'_n + \alpha^2 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} c_n(t) = F_n(t), t > 0 \\ c_n(0) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx \end{cases}, n \geq 1$$

Cujas soluções são dadas por

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} + e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \int_0^t F_n(\tau) e^{\alpha^2 n^2 \pi^2 \tau / L^2} d\tau, n \geq 1.$$

Portanto, a solução formal do *PVIF* é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(0) e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} + \int_0^t F_n(\tau) e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 (t-\tau) / L^2} d\tau \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0$$

Entretanto, nem todo *PVIF* com equação não-homogênea exige o emprego do método da variação dos parâmetros. Vejamos um exemplo dado pelo difusão do calor numa barra finita, com superfície lateral isolada e extremidades mantidas a 0°C . Suponhamos que uma fonte de calor interna gera calor a uma taxa constante a $^\circ\text{C}$. Neste caso, o modelo matemático é dado pelo

$$PVIF : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + a, (x, t) \in]0, L[\times]0, \infty[\\ u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Neste caso podemos reduzir a EDP inicial a uma EDP homogênea através da utilização de uma função auxiliar $g(x)$ tal que $w(x,t) = u(x,t) - g(x)$ seja solução do seguinte

$$PVIF : \begin{cases} w_t = \alpha^2 w_{xx} & , (x,t) \in]0, L[\times]0, \infty[\\ w(0,t) = w(L,t) = 0 & , t > 0 \\ w(x,0) = f(x) - g(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Para isso é necessário que

$$g''(x) = -\frac{a}{\alpha^2} \Rightarrow g(x) = -\frac{a}{2\alpha^2} x^2 + c_1 x + c_2, 0 \leq x \leq L.$$

Impondo as condições de fronteira, obtem-se que $c_1 = aL/2\alpha^2, c_2 = 0$. Portanto, a solução do PVIF não-homogêneo é dada por

$$u(x,t) = \frac{a}{2\alpha^2} x(L-x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

Com

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - g(x)] \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx, n \geq 1.$$

2.5 Condições de fronteira não-homogêneas

Até agora consideramos apenas PVIF's com condições de fronteira homogêneas. É chegada a hora de abordarmos o problema de difusão do calor numa barra finita submetida a temperaturas não nulas nas extremidades. Neste caso, o modelo matemático será dado pelo seguinte

$$PVIF : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & , (x,t) \in]0, L[\times]0, +\infty[\\ u(0,t) = h_1(t), u(L,t) = h_2(t), & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & , 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

A abordagem desse tipo de problema consiste no emprego de uma mudança da variável dependente de modo a torna-lo um problema com condição de fronteira homogênea.

Supondo que é possível encontrar uma função $v(x,t)$ de classe C^2 tal que

$$v(0,t) = h_1(t), v(L,t) = h_2(t), \forall t > 0$$

Então se $u(x,t)$ é solução do PVIF inicial, teremos que $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ será solução do seguinte

$$PVIF : \begin{cases} w_t = \alpha^2 w_{xx} + \alpha^2 v_{xx} - v_t, (x,t) \in]0, L[\times]0, \infty[\\ w(0,t) = w(L,t) = 0, 0 < t < \infty \\ w(x,0) = f(x) - v(x,0), 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

De modo que, se pudermos determinar uma função $v(x,t)$ que seja solução da equação do calor homogênea, então $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ será solução do

$$PVIF : \begin{cases} w_t = \alpha^2 w_{xx}, (x,t) \in]0, L[\times]0, \infty[\\ w(0,t) = w(L,t) = 0, 0 < t < \infty \\ w(x,0) = f(x) - v(x,0), 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Ou seja

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x,$$

Com

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - v(x,0)] \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx, \forall n \geq 1.$$

Sendo assim, a solução do PVIF original será dada por

$$u(x,t) = v(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, 0 \leq x \leq L, t \geq 0$$

Exemplo: Barra com extremidades a temperatura constante. Tem-se o seguinte modelo matemático:

$$PVIF : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, (x,t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = a, u(L,t) = b, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Definindo a função $v(x,t) = a + (b-a)x/L$, tem-se que $v(0,t) = a, v(L,t) = b, v_t - v_{xx} = 0$. Logo, $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ é solução do seguinte

$$PVIF : \begin{cases} w_t = \alpha^2 w_{xx}, (x,t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+ \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, t > 0 \\ w(x,0) = f(x) - a + (a-b)x/L, 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

De modo que,

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - a + (a-b)x/L] \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx \right] e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x.$$

Portanto,

$$u(x,t) = a + (b-a)x/L + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - a + (a-b)x/L] \sin \frac{n\pi}{L} x dx \right] e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

será a solução do *PVIF* se $f \in C([0, L])$, $f' \in C_p([0, L])$.

Exemplo: Barra com extremidades a temperatura variando linearmente. Neste caso, tem-se o seguinte modelo matemático;

$$PVIF : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, (x,t) \in]0, L[\times]0, \infty[\\ u(0,t) = a_1 + a_2 t, u(L,t) = b_1 + b_2 t, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Definindo a seguinte função auxiliar

$$v(x,t) = a_1 + a_2 t + [(b_1 + b_2 t) - (a_1 + a_2 t)]x/L.$$

Tem-se que

$$v(0,t) = a_1 + a_2 t, v(L,t) = b_1 + b_2 t, \forall t > 0$$

e

$$v_t - \alpha^2 v_{xx} = a_2 + (b_2 - a_2)x/L.$$

Então deve-se “corrigir” $v(x,t)$ de modo a torna-la solução da equação homogênea do calor. Tomando uma função “corretora” $\delta(x)$ tal que

$$\alpha^2 \frac{d^2}{dx^2} \delta(x) = a_2 + (b_2 - a_2)x/L, \delta(0) = \delta(L) = 0. \quad (PVF)$$

Obtem-se que a função “corrigida” $\tilde{v}(x,t) = v(x,t) + \delta(x)$ é solução da equação do calor homogênea e satisfaz

$$\tilde{v}(0,t) = a_1 + a_2 t, \tilde{v}(L,t) = b_1 + b_2 t, \forall t > 0.$$

Para resolver o (PVF) acima basta integrar duas vezes a EDO e obter que

$$\alpha^2 \delta(x) = a_4 + a_3 x + a_2 \frac{x^2}{2} + (b_2 - a_2) \frac{x^3}{6L}$$

Então impondo as condições de fronteira, obtem-se que $a_4 = 0$, $a_3 = -a_2 L / 2 + (a_2 - b_2)L / 6$, ou seja

$$\delta(x) = \frac{a_2}{2\alpha^2} x(x-L) + \frac{(b_2 - a_2)}{6L\alpha^2} x(x^2 - L^2).$$

Assim, $w(x,t) = u(x,t) - \tilde{v}(x,t)$ é solução do *PVIF* com condições de fronteira homogêneas e portanto

$$u(x,t) = \frac{a_2}{2\alpha^2} x(x-L) + \frac{(b_2 - a_2)}{6L\alpha^2} x(x^2 - L^2) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

com

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - \left(a_1 + (b_1 - a_1)x/L + \frac{a_2}{2\alpha^2} x(x-L) + \frac{(b_2 - a_2)}{6L\alpha^2} x(x^2 - L^2) \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right] dx, n \geq 1$$

é a solução do *PVIF* inicial.

2.6 Princípio do Máximo e Unicidade

Consideremos o seguinte

$$PVIF : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + F(x,t), (x,t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = h_1(t), u(L,t) = h_2(t), t > 0 \\ u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (1)$$

Já conhecemos sua solução formal. Para provarmos que *PVIF* acima é “*bem posto*” no sentido de Jacques Hadamar teríamos que provar os seguintes itens;

- (i) Existe uma função $u :]0, L[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que u_t, u_{xx} são contínuas em $]0, L[\times \mathbb{R}^+$ e $u(x,t)$ satisfaz a EDP, as condições de fronteira e a condição inicial. (**Existência de solução**)
- (ii) A solução é única. (**Unicidade da solução**)
- (iii) A solução depende continuamente dos dados iniciais. (**Estabilidade da solução**)

Vejamos a questão da unicidade. Supondo que $u_1(x,t)$ e $u_2(x,t)$ são duas soluções do *PVIF*, obtemos que $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ é solução do seguinte

$$PVIF : \begin{cases} w_t = \alpha^2 w_{xx}, (x,t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+ \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, 0 < t < \infty \\ w(x,0) = 0, 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (2)$$

A unicidade da solução será obtida se provarmos que $w \equiv 0$ em $]0, L[\times \mathbb{R}^+$. Para isso, utilizaremos o seguinte resultado

Teorema: (Princípio do Máximo)

Seja $u(x,t)$ contínua no retângulo fechado

$$\bar{\mathcal{R}} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x \leq x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}$$

Satisfazendo a equação homogênea do calor no retângulo aberto

$$\mathcal{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x \leq x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}$$

Então, o máximo (e o mínimo) de $u(x, t)$ é assumido em um dos seguintes lados de $\bar{\mathcal{R}}$:

$$l_1 = \{x = x_1; t_1 \leq t \leq t_2\}, l_2 = \{x = x_2; t_1 \leq t \leq t_2\}, l_3 = \{t = t_1; x_1 \leq x \leq x_2\} .$$

Prova: (Privalov)

Sejam M o valor máximo de $u(x, t)$ em $\bar{\mathcal{R}}$ e m o valor mínimo de $u(x, t)$ em $l_1 \cup l_2 \cup l_3$. O objetivo é provar que $M=m$. Supondo, por contradição, que $M > m$. Seja $(x_0, y_0) \in \bar{\mathcal{R}} \setminus (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$ onde $u(x, t)$ assume seu valor máximo. Definindo a função

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{(M - m)}{4L^2} (x - x_0)^2 ,$$

onde $L = x_2 - x_1$. Como em $l_1 \cup l_2 \cup l_3$ tem-se que

$$u(x, t) \leq v(x, t) < m + \frac{(M - m)}{4L^2} L^2 < M , \text{ e } v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M .$$

Então o máximo de v é atingido em um ponto $(x^*, t^*) \in \bar{\mathcal{R}} \setminus (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$.

OBS: (Critério para máximo relativo $(x^*, y^*) \in D(f)$ de uma função de classe $C^2, f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$);

$$\nabla f(x^*, y^*) = (0, 0) \text{ e } (f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy})(x^*, y^*) < 0 \wedge f_{xx}(x^*, y^*) < 0 .$$

De modo que,

$$v_t(x^*, t^*) = 0 \text{ e } v_{xx}(x^*, t^*) < 0 .$$

Por outro lado, tem-se que

$$v_t(x, t) = u_t(x, t) \text{ e } v_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t) + \frac{(M - m)}{2L^2} .$$

Logo,

$$v_t(x^*, t^*) - \alpha^2 v_{xx}(x^*, t^*) = u_t(x^*, t^*) - \alpha^2 u_{xx}(x^*, t^*) - \alpha^2 \frac{(M - m)}{2L^2} = -\alpha^2 \frac{(M - m)}{2L^2} < 0$$

Ou seja

$$0 = v_t(x^*, t^*) < \alpha^2 v_{xx}(x^*, t^*) \Rightarrow v_{xx}(x^*, t^*) > 0 .$$

O que é um absurdo! Portanto, $u(x, t)$ assume seu máximo em $l_1 \cup l_2 \cup l_3$, ou seja, $M=m$. Para se obter que o valor mínimo também é atingido em $l_1 \cup l_2 \cup l_3$, basta observar que $-u$ satisfaz a equação do calor homogênea e que o mínimo de u é igual a $-$ máximo $(-u)$. \square

Aplicação ao PIVF (2): Seja w solução de (2). Então dado $T > 0$ tem-se que w satisfaz a equação homogênea do calor no retângulo

$$\mathcal{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\} .$$

De modo que, pelo Princípio do Máximo (e do mínimo) tem-se que

$$0 \leq w(x,t) \leq 0, \forall (x,t) \in \bar{\mathcal{D}}.$$

Como $T > 0$ é arbitrário conclui-se que

$$w(x,t) = 0, \forall (x,t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+.$$

Portanto,

$$u_1(x,t) = u_2(x,t), \forall (x,t) \in [0, L] \times \mathbb{R}^+. \quad \square$$

A estabilidade da solução é consequência imediata do seguinte resultado, que por sua vez é consequência do Princípio do Máximo.

Teorema: (Dependência Contínua da Solução em relação aos dados iniciais)

Sejam $f_1(x), f_2(x)$ contínuas em $[0, L]$ e sejam u_1, u_2 respectivas soluções do seguinte

$$PVIF : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x,t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & 0 < t < \infty, i = 1, 2 \\ u(x,0) = f_i(x) & , 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Neste caso, tem-se que

$$\max_{(x,t) \in \bar{\mathcal{D}}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \max_{0 \leq x \leq L} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

2.7 Temperatura de Equilíbrio

Dado o seguinte

$$PVIF : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + g(x), & (x,t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = h_1(t), u(L,t) = h_2(t), & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Definição: Uma *solução assintótica* do PVIF acima é uma função $U(x)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (u(x,t) - U(x,t)) = 0$$

onde $u(x,t)$ é a solução do PVIF. Se existir uma solução assintótica independente do tempo $U(x)$ ela será a **temperatura de equilíbrio** e $v(x,t) = u(x,t) - U(x)$ será a parte transiente da solução, ou seja, a solução do PVIF será a soma de uma **parte transiente** com uma **parte estacionária** (ou **regime permanente**).

Exemplo: Dado o seguinte

$$PVIF : \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + g(x), (x, t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = a, u(L, t) = b, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Definindo $v(x, t) = u(x, t) - U(x)$ tem-se que $v(x, t)$ é solução do seguinte

$$PVIF : \begin{cases} v_t = \alpha^2 v_{xx} - \alpha^2 U''(x) + g(x), (x, t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+ \\ v(0, t) = a - U(0), v(L, t) = b - U(L), t > 0 \\ v(x, 0) = f(x) - g(x), 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

De modo que, se U for solução do seguinte problema de valor de fronteira

$$PVF : \begin{cases} \alpha^2 U''(x) = g(x), 0 \leq x \leq L \\ U(0) = a, U(L) = b \end{cases}$$

Teremos que $v(x, t)$ será solução do seguinte

$$PVIF : \begin{cases} v_t = \alpha^2 v_{xx}, (x, t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+ \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, 0 < t < \infty \\ v(x, 0) = f(x) - U(x), 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Cuja solução, conforme sabemos, é dada por

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x .$$

com

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - U(x)] \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx, \forall n \geq 1 .$$

Assim, obtemos que

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x)$$

onde

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(x, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = 0 .$$

Portanto, $U(x)$ será a temperatura de equilíbrio do *PVIF* inicial uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = U(x) .$$

