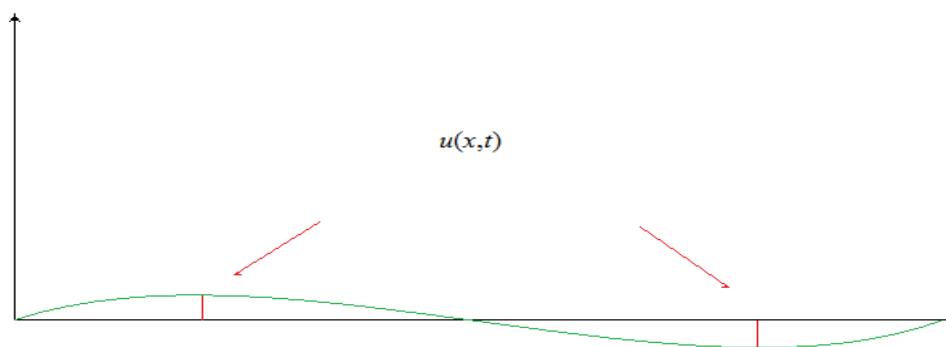


## 3. A Equação da Onda

### 3.1 Equação da onda unidimensional: pequenas oscilações de uma corda

Dedução do Modelo Matemático:

Por corda entende-se um fio fino e flexível. Supondo que, em estado de equilíbrio, a corda coincida com o eixo- $x$ , nosso estudo limitar-se-á ao caso de pequenas oscilações transversais. Por transversal designa-se a oscilação que se realiza em um plano que contém o eixo- $x$  e no qual cada elemento da corda se desloca perpendicularmente eixo- $x$ . Representaremos por  $u(x,t)$  o deslocamento transversal de cada ponto  $x$  da corda no instante  $t$  a partir da sua posição de equilíbrio.



**Fig. 3.1**

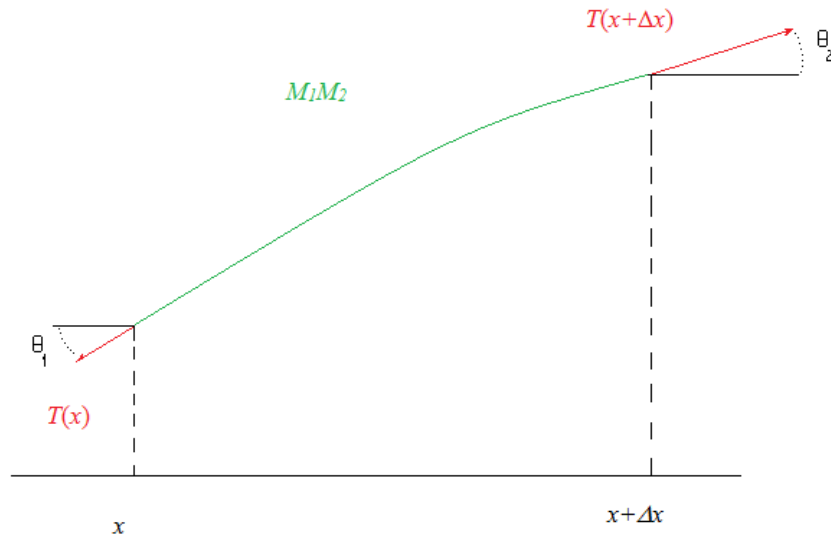
As seguintes hipóteses são necessárias para a fundamentação das considerações posteriores;

(H1) Todas as forças de atrito, tanto internas quanto externas, não serão consideradas.

(H2) A força gravitacional é pequena quando comparada com as tensões na corda.

(H3) As amplitudes  $u(x,t)$  das oscilações e suas derivadas são pequenas, de modo que seus quadrados e produtos serão desprezados nos cálculos quando comparados com a unidade.

Par obtermos o modelo matemático analisaremos todas as forças atuando numa pequena seção da corda num certo instante  $t$ . Supondo que o perfil da corda no instante  $t$  seja dado pela figura abaixo, onde o segmento  $[x, x+\Delta x]$  se deformou no arco de curva  $M_1M_2$ .



**Fig.3.2**

O comprimento do arco  $M_1M_2$  no instante  $t$  é dado por

$$S = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx .$$

Em virtude de (H3) obtem-se que

$$S \approx \Delta x .$$

Desse modo quando se estuda pequenas oscilações não há variação no comprimento do segmento  $[x, x+\Delta x]$ . De modo que, pela Lei de Hooke, pode-se concluir que a intensidade da tensão,  $T$ , em cada ponto, não varia com o tempo, ou seja, que a variação da tensão durante o movimento não é levada em conta em relação à tensão de equilíbrio  $T_0$ . Aqui  $T_0$  é a tensão a qual está submetido o segmento  $[x, x+\Delta x]$  na posição de equilíbrio.

É possível mostrar que a tensão  $T$  pode ser tomada como independente de  $x$ , isto é, pode-se considerá-la igual a tensão  $T_0$ . De fato, as forças que atuam sobre o arco  $M_1M_2$  são as seguintes;

F1) As tensões  $T(x)$ ,  $T(x+\Delta x)$  tangenciais a corda.

F2) As forças externas: uma força externa poderia ser aplicada a qualquer ponto da corda em qualquer instante; alguns exemplos seriam:

2.1- gravidade:  $F(x, t) = -mg$  .

2.2- impulsos ao longo da corda em diferentes instantes de tempo.

F3) As forças de inércia:

3.1- forças de atrito:  $F(x, t) = -\beta u_t(x, t)$ ,  $\beta > 0$ .

3.2- forças restauradoras:  $F(x, t) = -\gamma u(x, t)$ ,  $\gamma > 0$ .

3.3- peso do segmento  $[x, x+\Delta x]$ :  $F(x, t) = -Peso = -ma = -(\rho(x)\Delta x)u_{tt}(x, t)$ .

Como, por hipótese, o movimento é na direção perpendicular ao eixo- $x$  e as forças externas e de inércia também tem direção perpendicular a esse eixo, deduz-se que o arco  $M_1M_2$  não possui aceleração na direção do eixo- $x$ , isto é, a resultante das forças na direção do eixo- $x$  é nula. Então, representando por  $\theta$  o ângulo agudo que a direção de  $T$  faz com o eixo- $x$  no instante  $t$ , tem-se que

$$T(x + \Delta x)\cos\theta(x + \Delta x) - T(x)\cos(x) = 0 .$$

Da hipótese de serem pequenas as oscilações obtém-se que

$$\cos\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\theta(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \cong 1 .$$

Resultando que

$$T(x + \Delta x) \cong T(x) .$$

quaisquer que sejam os pontos da corda. Assim  $T$  não depende de  $x$  e será identificada com  $T_0$  para todo  $x$  e todo  $t$ .

Vale a pena lembrar o **Princípio de D'Alembert**:

“Num sistema material em movimento as forças nele aplicadas e as forças de inércia se equilibram”.

A equação diferencial para pequenas oscilações de uma corda será deduzida mediante a aplicação desse princípio. Para tanto serão explicitadas as forças que atuam na corda. Viu-se que, devido as condições impostas, as forças responsáveis pelo movimento são as componentes das tensões nas direções dos deslocamentos perpendiculares, as forças externas e as forças de inércia. Analisando essas forças obtém-se:

1. A resultante das tensões na direção perpendicular, no instante  $t$ , é dada por;

$$F_1 = T_0[\text{sen}\theta(x + \Delta x) - \text{sen}\theta(x)]$$

Sendo que

$$\text{sen}\theta(x) = \frac{\text{tg}\theta(x)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\theta(x)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \cong u_x$$

Conclui-se que

$$F_1 = T_0 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = T_0 \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx .$$

2. A resultante das forças externas na direção perpendicular, no instante  $t$ , é dada por:

$$F_2 = \int_x^{x+\Delta x} p(x,t) dx$$

Onde  $p(x,t)$  é a distribuição das forças externas por unidade de comprimento atuando sobre a corda na direção perpendicular, no instante  $t$ .

3. A resultante das forças de inercia: se  $\rho(x)$  for a densidade linear da corda então a massa do segmento  $[x, x+\Delta x]$  da corda é  $\rho(x)\Delta x$  e a resultante perpendicular das forças de inercia sobre esse segmento será, no instante  $t$ , dada por

$$-\rho(x)\Delta x u_{tt}$$

uma vez que não se está considerando as forças de atrito e restauradoras. De modo que a força de inercia atuando sobre todo arco  $M_1 M_2$ , no instante  $t$ , é dada por

$$F_3 = \int_x^{x+\Delta x} -\rho(x) u_{tt} dx .$$

Aplicando o Princípio de D'Alembert conclui-se que

$$\int_x^{x+\Delta x} \left[ T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t) \right] dx = 0 .$$

Qualquer que seja o segmento  $[x, x+\Delta x]$  para todo  $t > 0$ . Supondo o integrando é uma função contínua, obtem-se necessariamente que

$$\rho(x) u_{tt} = T_0 u_{xx} + p(x,t)$$

Esta é a equação diferencial para pequenas oscilações de uma corda flexível sob ação de uma força externa  $p(x,t)$  desprezando-se as forças de atrito e forças restauradoras. Quando se tem  $\rho(x)$  constante, obtem-se a EDP:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t)$$

Onde  $c^2 = \frac{T_0}{\rho}$  e  $F(x,t) = \frac{p(x,t)}{\rho}$ . No caso de se considerar as forças de atrito e restauradoras obtem-se a **equação do telégrafo**:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - \beta u_t - \gamma u + F(x, t) .$$

### 3.2 O Método de d'Alembert

Obtida uma equação diferencial parcial descrevendo determinado fenômeno, somos confrontados com o problema de saber se **existe** solução e se essa solução é **única**. Outra questão extremamente importante nas aplicações é saber se as soluções de um determinado modelo matemático variarão pouco quando os dados iniciais e de fronteira sofrerem pequenas modificações, uma vez que tais dados são obtidos através de medidas experimentais que portanto sempre apresentam um erro, ou seja são sempre aproximações. De modo que é importante saber se existe uma **dependência continua das soluções em relação aos dados iniciais**. No caso da corda, as condições iniciais são dadas pela posição da corda e pela velocidade de cada ponto no instante inicial  $t = 0$ . A dependência continua seria então o problema de saber se, observadas duas posições iniciais  $u_0$  e  $v_0$  e duas velocidades iniciais  $u_1$  e  $v_1$ , sendo  $u_0$  próxima de  $v_0$  e  $u_1$  próxima de  $v_1$ , resulta em se ter a solução  $u$  obtida de  $u_0, u_1$  e a solução  $v$  obtida de  $v_0, v_1$  suficientemente próximas. Esses três quesitos impostos a um **PVI** (Problema de Valor Inicial) constituem o **critério de Hadamard** para boa postura de um **PVI**.

Utilizaremos o modelo matemático para corda infinita para montagem do **PVI** e o método criado por d'Alembert para provar que o **PVI** é bem posto, mediante certas hipóteses naturais sobre os dados iniciais. Tal método baseia-se em uma mudança de variáveis visando simplificar a equação. Com o objetivo de encontrar a mudança conveniente considera-se a aplicação linear

$$(x, t) \rightarrow (\xi, \eta)$$

do  $\mathbb{R}^2$  no  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$\xi = \xi(x, t) = \alpha x + \beta t \quad , \quad \eta = \eta(x, t) = \gamma x + \delta t .$$

onde supomos  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  para que tal mudança seja invertível.

Modelo Matemático para corda infinita livre e homogênea;

$$PVI : \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad , -\infty < x < +\infty \\ u_t(x, 0) = u_1(x) \quad , -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \beta \frac{\partial \xi}{\partial t} + \delta \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \alpha + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \gamma = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\alpha\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \beta + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta\delta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

De modo que

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \Leftrightarrow (\beta^2 - c^2 \alpha^2) u_{\xi\xi} + 2(\beta\delta - c^2 \alpha\gamma) u_{\xi\eta} + (\delta^2 - c^2 \gamma^2) u_{\eta\eta} = 0$$

Logo, para reduzir à forma canônica desejada impomos que

$$\beta^2 - c^2 \alpha^2 = \delta^2 - c^2 \gamma^2 = 0 \text{ e } \beta\delta - c^2 \alpha\gamma \neq 0 .$$

Portanto se  $\beta = c\alpha$  e  $\delta = -c\gamma$  obtem-se que

$$\beta\delta - c^2 \alpha\gamma = (c\alpha)(-c\gamma) - c^2 \alpha\gamma = -2c^2 \alpha\gamma \neq 0$$

pois por hipótese  $0 \neq \alpha\delta - \beta\gamma = \alpha(-c\gamma) - \gamma(c\alpha) = -2c\alpha\gamma$  . Assim, uma boa mudança é dada por

$$\begin{cases} \xi = \alpha(x + ct) \\ \eta = \gamma(x - ct) \end{cases}$$

Sendo  $\alpha, \gamma$  números reais não nulos podemos tomar  $\alpha = \gamma = 1$  e obter a seguinte equação transformada

$$-4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \text{ ou seja } \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0 .$$

Integrando em relação a  $\eta$  obtem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = h(\xi) \Rightarrow u(\xi, \eta) = \int_0^\xi h(\xi) d\xi + g(\eta) = f(\xi) + g(\eta) .$$

Onde  $f, g$  são funções de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}$  . De modo que, a solução de D'Alembert é dada por

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

Assim obteve-se uma “**solução geral**” para uma EDP, fato excepcional na teoria das EDP's! Para obtermos dessa solução geral uma única solução do **PVI**, basta impormos as condições

iniciais. Outro fato raro na teoria das EDP's! Para isso precisamos supor que  $u_0$  é de classe  $C^2$  e  $u_1$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}$ . Com isso obtemos que

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) + g(x) = u_0(x) \\ u_t(x, 0) = cf'(x) - cg'(x) = u_1(x) \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = u_0(x) \\ f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_0^x u_1(s) ds + c_1 \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) ds + \frac{c_1}{2} \\ g(x) &= \frac{1}{2} u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) ds - \frac{c_1}{2} \end{aligned}$$

O que implica em

$$\begin{aligned} f(x+ct) &= \frac{1}{2} u_0(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} u_1(s) ds + \frac{c_1}{2} \\ g(x-ct) &= \frac{1}{2} u_0(x-ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} u_1(s) ds - \frac{c_1}{2} \end{aligned}$$

Portanto a solução de D'Alembert do **PVI** é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds$$

Fórmula obtida em 1747. Assim, provou-se a existência e também a unicidade, já que se existir uma outra solução  $v(x, t)$  do **PVI** com as mesmas condições iniciais então pela própria fórmula obtem-se que  $u \equiv v$ .

Façamos a verificação da dependência continua em relação aos dados iniciais. Sejam  $(u_0, u_1), (v_0, v_1)$  dois dados iniciais e sejam  $u(x, t), v(x, t)$  as respectivas soluções do **PVI**. Novamente, pela fórmula de d'Alembert obtem-se que

$$\begin{aligned} |u(x, t) - v(x, t)| &\leq \frac{1}{2} |u_0(x+ct) - v_0(x+ct)| + \frac{1}{2} |u_0(x-ct) - v_0(x-ct)| + \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |u_1(s) - v_1(s)| ds \end{aligned}$$

Então dado  $\varepsilon > 0$  pode-se tomar  $\delta = \varepsilon / (1 + T), T > 0$  e obter-se que

$$|u(x,t) - v(x,t)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T$$

se

$$|u_i(x) - v_i(x)| < \delta, i = 0, 1.$$

Portanto, o **PVI** da corda infinita é bem posto!

**Exemplo:** Dado o seguinte

$$PVI : \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) = 2, & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Determine o valor da solução no ponto (1, 2).

Pela fórmula de d'Alembert, tem-se que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[(x+t)^2 + (x-t)^2] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 2ds = x^2 + t^2 + 2t.$$

De modo que,  $u(1, 2) = 9$ .

### 3.3 Interpretação da solução de d'Alembert

Considerando-se uma fotografia da onda no instante  $t = 0$  (posição inicial  $u_0$ ), obtém-se o gráfico da função  $u_0(x) = u(x, 0)$ , onde  $u(x, t)$  é a solução da equação da onda e  $u_0$  é o perfil inicial da onda. Supondo-se a velocidade inicial nula ( $u_1 \equiv 0$ ) obtém-se que a solução se reduz a

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)]$$

Observamos primeiramente que o gráfico de  $u_0(x-ct)$  é obtido do gráfico de  $u_0(x)$  transladando de  $ct$ , no sentido positivo do eixo- $x$ . Do mesmo modo, o gráfico de  $u_0(x+ct)$  é o transladado do gráfico de  $u_0(x)$  no sentido negativo. A parte da solução  $u_0(x-ct)$  é, então, uma onda com perfil  $u_0(x)$  propagando-se no sentido positivo do eixo- $x$  com velocidade de propagação igual a  $c$ . Essa onda chama-se **onda progressiva** ou **onda do futuro**. Analogamente, a parte  $u_0(x+ct)$  é uma onda que se propaga com mesma velocidade porém no sentido oposto e recebe o nome de **onda regressiva** ou **onda do passado**. A solução  $u(x, t)$  será a superposição dos dois movimentos. Embora, de acordo com o que foi visto, a onda-solução seja representada por uma função de classe  $C^2$  (no caso em que se tem  $u_1 \equiv 0$ ),



para facilitar a análise gráfica, vamos considerar uma função de classe  $C^2$  por partes como no caso da **Corda Dedilhada**.

Consideremos uma onda cujo perfil inicial seja dado pela função

$$u_0(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < -1, x > 1 \end{cases}$$

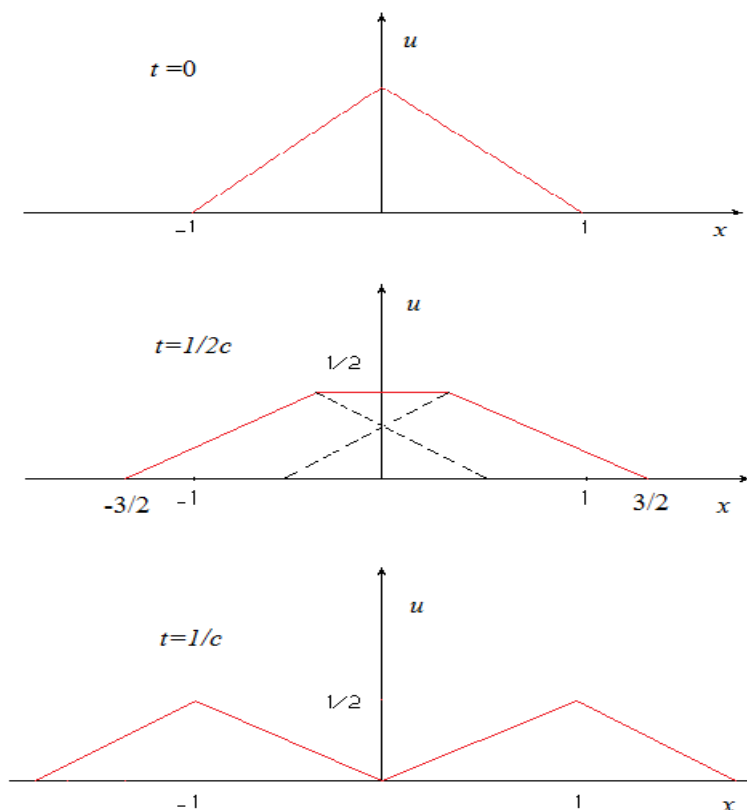
Então

$$u_0(x+ct) = \begin{cases} x+ct+1, & -1-ct \leq x \leq -ct \\ -x-ct+1, & -ct \leq x \leq 1-ct \\ 0, & x < -1-ct, x > 1-ct \end{cases}$$

e

$$u_0(x-ct) = \begin{cases} x-ct+1, & -1+ct \leq x \leq ct \\ -x+ct+1, & ct \leq x \leq 1+ct \\ 0, & x < -1+ct, x > 1+ct \end{cases}$$

Fazendo  $t = t_n = n/2c, n = 0, 1, 2, \dots$  obtem-se uma visão clara de que  $u_0(x-ct)$  é progressiva e  $u_0(x+ct)$  é regressiva



**Fig.3.3**

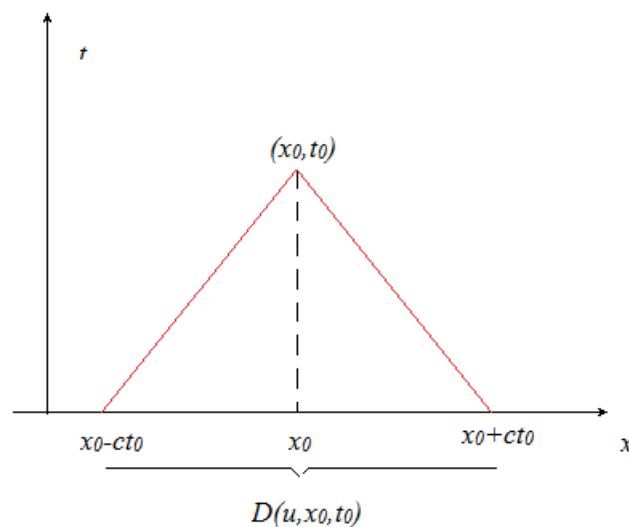
**OBS:** Uma corda para poder ser dedilhada não poderia ser infinita pois seus extremos teriam que estar fixos.

### 3.3.1 Domínio de Dependência:

Deduz-se da fórmula de d'Alembert que o conhecimento da solução  $u$  do PVI no ponto  $(x, t)$  depende apenas dos valores dos dados iniciais no intervalo  $[x - ct, x + ct]$ , isto é dado  $(x_0, t_0)$ , o valor da solução neste ponto só depende de  $u_0$  nas extremidades de  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  e de  $u_1$  sobre este intervalo. Observamos que qualquer alteração em  $u_0$  e em  $u_1$  fora desse intervalo não altera a solução no ponto  $(x_0, t_0)$ . Por isso, define-se o intervalo

$$D(u, x_0, t_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - ct_0 \leq x \leq x_0 + ct_0\}$$

como sendo o **domínio de dependência** da solução  $u$  no ponto  $(x_0, t_0)$ .

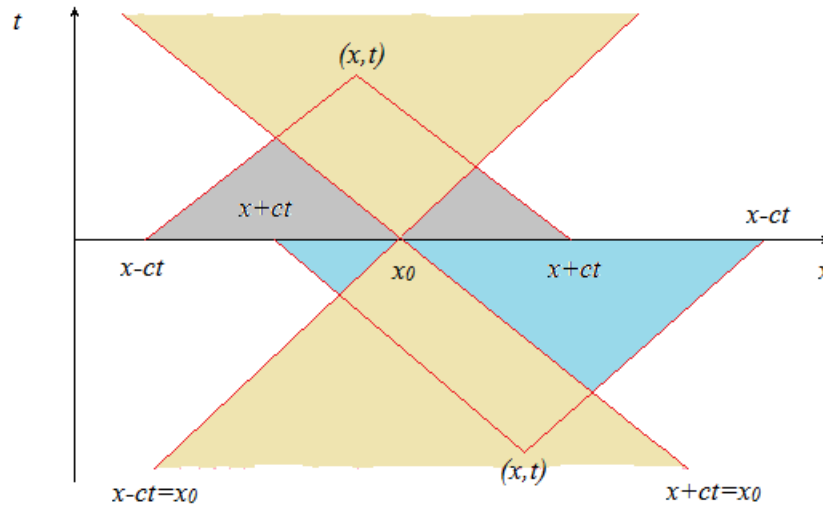


**Fig.3.4**

### 3.3.1 Domínio de Influência:

Agora tomando  $x_0$  no eixo- $x$ , queremos saber quais são os pontos  $(x, t)$  nos quais a solução se modifica quando se alteram os valores de  $u_0$  e  $u_1$  em  $x_0$ ? Isto é, quais são os pontos  $(x, t)$  tais que  $x_0$  pertence ao seu domínio de dependência? Observando-se a figura 3.4 conclui-se que são os pontos pertencentes ao cone no semi-plano superior  $t \geq 0$ , com vértice em  $(x_0, 0)$  e lados  $t = \pm(x - x_0) / c$ . Essa região (vide figura 3.5) é denominada **domínio de influência** na solução do ponto  $(x_0, 0)$  e é dada pelo cone futuro

$$I(u, x_0) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x_0 - ct \leq x \leq x_0 + ct, t \geq 0\}$$



**Fig. 3.5**

No exemplo anterior tem-se que no ponto  $(3, 2)$

$$D(u, 3, 2) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 5\} .$$

As características por esse ponto são as retas:  $t = x - 1$  e  $t = 5 - x$ . O domínio de influência é o cone com vértice no ponto  $(3, 0)$  limitado pelas retas:  $t = x - 3$  e  $t = 3 - x$  pois  $c = 1$ .

$$I(u; 3) = \{(x, t) : 3 - t \leq x \leq 3 + t, t \geq 0\} .$$

Resumindo se perturbarmos  $u_0$  ou  $u_1$  em  $(x_0, 0)$  essa perturbação será observada no referido cone para todo  $t \geq 0$ .

O domínio de influência de um intervalo  $[x_1, x_2]$  é a união dos domínios de influência de cada um dos pontos do intervalo (vide figura 3.6). Tomemos um ponto  $(x_0, t_0)$  do plano  $xt$ . Da fórmula de d'Alembert tem-se que

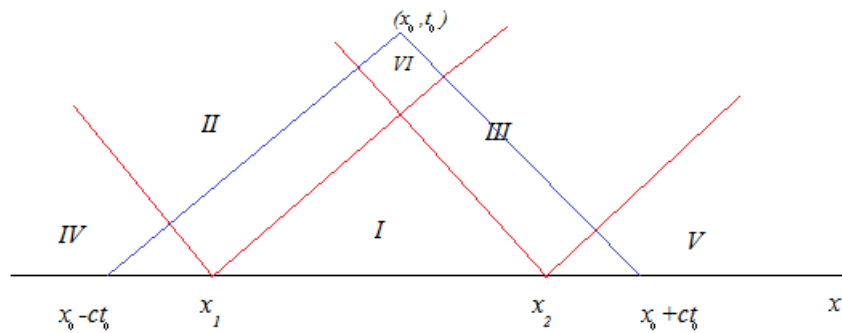
$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} u_0(x_0 - ct_0) - \frac{1}{2c} \int_0^{x_0 - ct_0} u_1(s) ds + \frac{1}{2} u_0(x_0 + ct_0) + \frac{1}{2c} \int_0^{x_0 + ct_0} u_1(s) ds$$

ou seja

$$u(x_0, t_0) = \varphi(x_0 - ct_0) + \psi(x_0 + ct_0)$$

Logo,  $\varphi(x - ct)$  é constante ao longo da característica:  $x - ct = x_0 - ct_0$ , ou seja  $\varphi(x - ct) = \varphi(x_0 - ct_0)$ , a onda do futuro possui deslocamento constante sobre essa característica. Do mesmo modo,  $\psi(x - ct)$  é constante ao longo da característica:  $x + ct = x_0 + ct_0$ , ou seja, a onda do passado possui deslocamento constante sobre essa

característica. Na figura 3.6 as características por  $x_1$  e  $x_2$  dividem o semi-plano  $t \geq 0$  em seis regiões.



**Fig. 3.6**

Na região I, tem-se a superposição da onda do futuro com a onda do passado, isto é os pontos de I são afetados pelas ondas progressivas e regressivas que tiveram início em pontos do intervalo  $[x_1, x_2]$ . Na região II, os pontos são perturbados apenas pelas ondas regressivas, enquanto na região III, os pontos são perturbados apenas pelas ondas progressivas. Os pontos das regiões IV e V são tais que seus domínios de dependência não interceptam o intervalo  $[x_1, x_2]$ , ou seja, os pontos dessas regiões não são afetados pela perturbação inicial. Na região VI, tomemos um ponto genérico  $(x_0, t_0)$ , tem-se que

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} [u_0(x_0 + ct_0) + u_0(x_0 - ct_0)] + \frac{1}{2c} \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} u_1(s) ds$$

onde  $x_0 - ct_0, x_0 + ct_0 \notin [x_1, x_2]$  o que implica em  $u_0(x_0 + ct_0) = u_0(x_0 - ct_0) = 0$ . Logo, no ponto  $(x_0, t_0)$  de VI resta apenas

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2c} \int_{x_1}^{x_2} u_1(\xi) d\xi .$$

O que significa que nesses pontos o sinal já passou, deixando apenas o “traço” de sua passagem dado pelo deslocamento constante

$$\frac{1}{2c} \int_{x_1}^{x_2} u_1(\xi) d\xi .$$

**O fenômeno de Huyghens:** Quando a velocidade inicial é nula,  $u_1 \equiv 0$ , (o caso da corda dedilhada é um caso particular, pois nesse caso  $u_0$  possui suporte compacto, isto é anula-se fora de um intervalo fechado limitado), observa-se um fenômeno interessante: fixado um ponto  $x$  longe da perturbação inicial, esta perturbação demora um certo tempo até alcançar o ponto  $x$ , então perturba esse ponto e, em seguida, passa deixando esse ponto em repouso para sempre. Esse fato, característico de ondas em dimensão ímpar, é conhecido como “**fenômeno de Huyghens**” e não ocorre em dimensão par (membranas, superfícies de líquidos) onde a perturbação inicial continua a afetar para sempre o ponto  $x$ . Ao contrario do que ocorre para ondas unidimensionais, no caso de ondas tridimensionais, o fenômeno de Huyghens ocorre mesmo se a velocidade inicial for diferente de zero.

**A integral da energia:** Suponhamos que os dados iniciais  $u_0, u_1$  sejam tais que para cada  $t \geq 0$   $u(x, t)$  e suas derivadas parciais até de segunda ordem sejam de quadrado integrável em relação a variável  $x$ . Por exemplo, isso ocorre se  $u_0, u_1$  satisfizerem as condições de compatibilidade impostas pela fórmula de D’Alembert para existência de solução única, isto é  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}), u_1 \in C^1(\mathbb{R})$  e além disso se ambas possuírem suporte compacto. Neste caso, multiplicando a EDP por  $u_t$  obtem-se a seguinte igualdade

$$u_{tt}u_t = c^2 u_{xx}u_t$$

ou seja

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2) + \frac{c^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_x^2) = c^2 \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t) .$$

Integrando em relação a  $x$ , de  $-\infty$  até  $+\infty$ , e supondo que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x u_t = 0$$

e que é possível permutar a ordem de integração com a derivação com relação a  $t$  ( o que ocorre nas condições acima) obtem-se que

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{c^2}{2} u_x^2 \right) dx = 0 . \quad (*)$$

A integral em (\*) é denominada **integral da energia** e a equação (\*) nos diz que a energia é constante em relação ao tempo. De modo que,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \frac{c^2}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right] dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \right)^2 + \frac{c^2}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) \right)^2 \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} u_1^2(x) + \frac{c^2}{2} \left( \frac{d}{dx} u_0(x) \right)^2 \right] dx \end{aligned}$$

para todo  $t > 0$ . Esse fato é interpretado como expressando a **conservação da energia**.

**Unicidade da solução para o PVI da corda infinita:** Através da utilização da conservação da energia é possível dar uma demonstração direta da unicidade da solução do PVI para a corda infinita. Supondo que  $u_0$  e  $u_1$  satisfazem as condições de diferenciabilidade necessária para a existência de solução clássica e que ambas tem suporte compacto, então se o PVI possuir duas soluções  $u(x,t)$  e  $v(x,t)$ , teremos que  $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$  será uma solução da EDP com condições iniciais identicamente nulas. Pela conservação da energia obteremos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} w_t^2(x,t) + \frac{c^2}{2} w_x^2(x,t) \right] dx = 0$$

para todo  $t \geq 0$ . Como  $w_t, w_x \in C(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ , então necessariamente  $w_t(x,t) = w_x(x,t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$ , o que implica em se ter  $w(x,t) = cte$ . Como  $w(x,0) = 0$  conclui-se que  $w \equiv 0$  em  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ , ou seja,  $u(x,t) = v(x,t)$  em  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ .

### 3.4 Vibrações Forçadas na Corda Infinita

O modelo matemático é dado pelo seguinte

$$PVI : \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x,t), -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = u_1(x), -\infty < x < \infty \end{cases}$$

onde  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}), u_1 \in C^1(\mathbb{R})$  e  $F$  é contínua em  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ .

Seja  $A = (x_0, t_0)$  um ponto arbitrário do semi-plano positivo no qual se deseja calcular a solução. Consideremos o seguinte **triângulo característico**

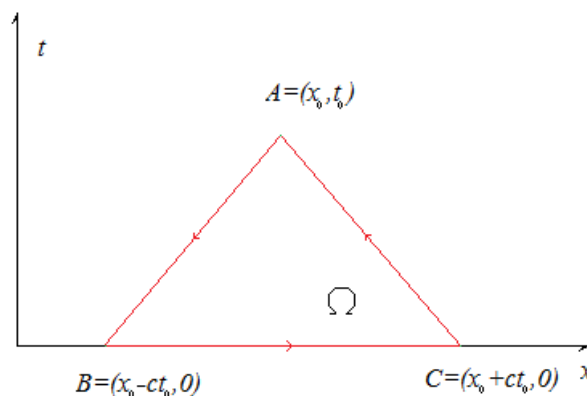


Fig. 3.7

onde a orientação de  $\partial\Omega = AB \cup BC \cup CA$  é dada pelo sentido das setas de modo a ser coerente com a orientação natural do eixo- $x$ . Integrando-se a equação sobre  $\Omega$  obtem-se

$$\int_{\Omega} (c^2 u_{xx} - u_{tt}) dx dt = - \int_{\Omega} F(x, t) dx dt .$$

Para calcular essa integração utilizaremos o Teorema de Green. Pondo  $Q = c^2 u_x, P = u_t$  obtemos que

$$\int_{\Omega} \text{div}(c^2 u_x - u_t) dx dt = \oint_{\partial\Omega} P dx + Q dt = \oint_{\partial\Omega} u_t dx + c^2 u_x dt .$$

Para calcularmos a integral curvilínea sobre  $\partial\Omega$  parametrizamos cada um dos segmentos orientados  $AB, BC, CA$  do seguinte modo;

$$AB : x - ct = x_0 - ct_0, x_0 - ct_0 \leq x \leq x_0$$

$$CA : x + ct = x_0 + ct_0, x_0 \leq x \leq x_0 + ct_0$$

$$BC : t = 0, x_0 - ct_0 \leq x \leq x_0 + ct_0$$

donde obtem-se que  $dx = c dt$  sobre  $AB$ ,  $dx = -c dt$  sobre  $CA$  e  $dt = 0$  sobre  $BC$ . De modo que,

$$\begin{aligned} \oint_{BC} u_t dx + c^2 u_x dt &= \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} u_t(x, 0) dx \\ \oint_{AB} u_t dx + c^2 u_x dt &= \oint_{AB} u_t(c dt) + c^2 u_x \left(\frac{dx}{c}\right) = c[u(x_0 - ct_0, 0) - u(x_0, t_0)] \\ \oint_{CA} u_t dx + c^2 u_x dt &= \oint_{CA} u_t(-c dt) + c^2 u_x \left(-\frac{dx}{c}\right) = -c \oint_{CA} du = -c[u(x_0, t_0) - u(x_0 + ct_0, 0)] \end{aligned}$$

ou seja

$$\oint_{\partial\Omega} u_t dx + c^2 u_x dt = \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} u_1(x) dx + c[u_0(x_0 - ct_0) + u_0(x_0 + ct_0)] - 2cu(x_0, t_0)$$

o que fornece

$$- \int_{\Omega} F(x, t) dx dt = \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} u_1(x) dx + c[u_0(x_0 - ct_0) + u_0(x_0 + ct_0)] - 2cu(x_0, t_0)$$

E como  $(x_0, t_0)$  é arbitrário, conclui-se que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} F(x, t) dx dt$$

Onde

$$\int_{\Omega} F(x,t) dx dt = \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau .$$

**Exemplo:** Calcular a solução do seguinte

$$PVI : \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 1, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = x^2 & , -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) = 1 & , -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[(x+t)^2 + (x-t)^2] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} ds d\tau \\ &= x^2 + t^2 + t + \frac{t^2}{2} = x^2 + \frac{3}{2}t^2 + t \end{aligned}$$

### 3.5 Corda Semi-Infinita

---



