4. Equações Elípticas

4.1 Introdução:

O principal representante das equações elípticas é a ***equação de Laplace***

$$\boxed{\Delta u = 0} \qquad (1.1)$$

onde Δ é o operador Laplaciano definido por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \text{(bidimensional)}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{(tridimensional)}$$

Embora a equação (1.1) tenha aparecido pela primeira vez em um artigo de Euler sobre hidrodinâmica em 1752, a equação ficou com o nome de Laplace em honra a Pierre-Simon de Laplace que , a partir de 1782, estudou extensivamente suas soluções quando investigou a atração universal entre corpos no espaço. A equação de Laplace aparece em muitos problemas da Física-Matemática :

(i)A função potencial elétrico de um campo elétrico estacionário em uma região sem carga satisfaz a equação de Laplace.

(ii)A energia potencial de uma partícula sobre a qual agem apenas forças gravitacionais satisfaz a equação de Laplace.

(iii)A temperatura em estado estacionário é solução da equação de Laplace.

OBS: em nenhum dos problemas acima existe dependência do tempo. A equação de Laplace descreve somente fenômenos estacionários (independentes do tempo). De modo que, é de se esperar que os problemas relacionados com a equação de Laplace não possuam condições iniciais, envolvendo apenas condições de fronteira (***problemas de contorno***).

A equação de Laplace não homogênea

$$\boxed{\Delta u = f}$$

onde f é uma função dada é conhecido como a ***equação de Poisson***.

Problema Matemático Básico: resolver a equação de Laplace ou de Poisson em um dado domínio Ω com uma condição sobre sua fronteira $\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega$, suposta suficientemente regular. Existem três tipos de problemas básicos

Problema de Dirichlet: Dada $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, obter $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que

$$\boxed{(D) : \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ , } em\ \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}}$$

Problema de Neumann: Dada $g:\partial\Omega \to IR$, obter $u \in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ tal que

$$(N):\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ , } em\ \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

onde $\vec{n}$ é a derivada normal apontando para o exterior de $\partial\Omega$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n}$.

Problema de Robin: Dada $h:\partial\Omega \to IR$ obter $u \in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ tal que

$$(R):\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ , } em\ \Omega \\ \sigma u + \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = h \end{cases}$$

Definição 1: Um problema de contorno ou problema de valor de fronteira (PVF) é dito ser bem posto (***well posed***) no sentido de Hadamard se :

(i) A solução existe.
(ii) A solução é única.
(iii) A solução depende contínuamente do seu valor na fronteira.

OBS: O problema de Dirichlet é bem posto. Já o problema de Neumann não é bem posto, uma vez que não há unicidade de soluções.

Exemplo: (Hadamard): O problema de Cauchy (PVI) para a equação de Laplace não é bem posto. De fato, seja o seguinte;

$$PVI_n:\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, (x,y) \in \Re \times]0,\infty[\\ u(x,0) = 0, u_y(x,0) = \dfrac{\cos nx}{n^2} \end{cases}$$

Tem-se que $u_n(x,y) = \dfrac{1}{n^3}\sinh ny \cos nx$ é uma solução do $PVI_n, \forall n \geq 1$, entretanto não se tem que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(x,y)\|_{C(\Re\times\Re^+)} = 0.$$

De fato, seja $\lambda \in]0,1[$. Tem-se que se *x* for um múltiplo irracional de π, então o conjunto de pontos $\{(\cos nx, \mathbf{sen} nx): n \in IN\}$ é denso no círculo unitário. De modo que, existe x_0 e $n_k \to +\infty$, tal que $\cos n_k x_0 \to \lambda$, quando $k \to \infty$. Por outro lado, $\forall y > 0$ tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sinh ny}{n^3} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{e^{ny} - e^{-ny}}{n^3}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{e^{ny}}{n^3} = +\infty$$

Então

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n_k^3}\sinh n_k y\cos n_k x_0 = +\infty,$$

para $y>0$. □

4.2 Funções Harmônicas; Princípio do Máximo

Definição 2: Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^n$ (um conjunto aberto e conexo). Uma função $u\in C^2(\Omega)$ que satisfaz a equação de Laplace é chamada ***função harmônica***.

Exemplo:

(i) $u(x,y)=ax+by+c, \forall a,b,c\in\mathbb{R}.$

(ii) $u(x,y)=x^2-y^2.$

(iii) Dada $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ complexa analítica, então suas partes real e imaginária são funções harmônicas.

Em contraste com o problema de Cauchy para a equação de Laplace, o problema de Dirichlet é bem posto. Isto será conseqüência do princípio do máximo-mínimo para funções harmônicas.

Notação: $\Omega\subset\mathbb{R}^n, n=2$ *ou* $3.$

$$P=(x,y), |P|=\sqrt{x^2+y^2} \text{ ou } P=(x,y,z), |P|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

Teorema 4.1: (***Princípio Máximo-Mínimo***)

Hipóteses: $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ *harmônica em um domínio limitado* Ω.

Tese:

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

prova: Caso *n*=2; seja $\varepsilon>0$ e seja a função

$$v(P)=u(P)+\varepsilon|P|^2.$$

Tem-se que

$$\Delta v=\Delta u+\varepsilon\Delta(x^2+y^2)=4\varepsilon>0.$$

Entretanto, pelo teste da derivada segunda, a condição necessária para existência de um ponto interior de máximo é que $v_{xx}, v_{yy}\le 0$ ou seja $\Delta v\le 0$. Logo, $v(P)$ não pode ter ponto de máximo interior em Ω e, como *v* é função contínua e $\overline{\Omega}$ é fechado limitado, então atinge seu ponto de máximo em $P_1\in\partial\Omega$ satisfazendo

$$v(P_1)=\max_{\partial\Omega} v(P)=\max_{\overline{\Omega}} v(P).$$

Então, para $P\in\overline{\Omega}$

$$u(P)<v(P)\le v(P_1)=u(P_1)+\varepsilon|P_1|^2\le\max_{\partial\Omega} u+\varepsilon R^2,$$

onde *R* é tal que $\boldsymbol{\Omega} \subset B_R(0)$. Como ε é arbitrário, obtém-se que

$$u(P) \le \max_{\partial\Omega} u \le \max_{\overline{\Omega}} u .$$

Ou seja

$$\max_{\overline{\Omega}} u \le \max_{\partial\Omega} u \le \max_{\overline{\Omega}} u .$$

Por outro lado, como –*u* também é harmônica e $\min_{\overline{\Omega}} u = -\max_{\overline{\Omega}}\{-u\}$, vale também para o mínimo. □

Corolário 4.1:
Hipóteses: $\boldsymbol{\Omega}$ *domínio limitado,* $f \in C(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ *e* $g \in C(\partial\boldsymbol{\Omega})$.
Tese: O ***Problema de Dirichlet***

$$\boxed{(D): \begin{cases} \Delta u = f & , P \in \boldsymbol{\Omega} \\ u(P) = g(P) , & P \in \partial\boldsymbol{\Omega} \end{cases}}$$

possui uma única solução.
prova: Supondo que $u_j(P), j = 1,2$ são soluções de (*D*). Definindo $u = u_1 - u_2$, tem-se que $u \in C^2(\boldsymbol{\Omega}) \cap C(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$, *u* é harmônica e $u \equiv 0, \forall P \in \partial\boldsymbol{\Omega}$. Pelo princípio do máximo-mínimo segue que $u \equiv 0 , \forall P \in \boldsymbol{\Omega}$. □

O resultado seguinte pode ser encontrado no Djairo, sem demonstração, e é o análogo do teorema da singularidade removível da Teoria das Funções de Variável Complexa que diz o seguinte: "*Sejam Ω um aberto do plano complexo C, $z_0 \in \Omega$, $f:\Omega$-$\{z_0\} \to C$ uma função analítica que é limitada numa vizinhança de z_0, então* ***lim*** *f(z) existe quando $z \to z_0$ e, representando esse limite por ω, a função $F:\Omega \to C$, definida por $F(z)=f(z)$ se $z \neq z_0$ e $F(z_0)=\omega$ é analítica.*" Isso significa que, a singularidade isolada z_0, que não seja polo ou singularidade essencial, é removível ; isto é, a função pode ser estendida analiticamente a z_0.

Teorema 4.2:
Hipóteses: Sejam Ω domínio do plano, $(x_0, y_0) \in \boldsymbol{\Omega}$ *e* $u : \boldsymbol{\Omega} \setminus \{(x_0, y_0)\} \to \Re$ *função harmônica limitada em uma vizinhança de* (x_0, y_0).
Tese: Existe $u_0 \in \Re$*, tal que* $u(x, y) \to u_0$ *quando* $(x, y) \to (x_0, y_0)$*, e a função*

$$\tilde{u} : \boldsymbol{\Omega} \to \Re : \tilde{u}(x, y) = \begin{cases} u_0 & , (x, y) = (x_0, y_0) \\ u(x, y) , & (x, y) \neq (x_0, y_0) \end{cases}$$

é harmônica.

Exemplo de Zaremba: Seja o seguinte domínio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

Tem-se que

$$\partial\Omega = \{(0,0)\} \cup S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} .$$

Seja a função $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}1\,,(x,y)=(0,0)\\0\,,\quad (x,y)\in S^1\end{cases}$$

O problema de Dirichlet para esse domínio e esse valor de fronteira não possui solução! De fato, supondo o contrário, seja *u* uma solução do problema. Então, *u* é harmônica em Ω e contínua em $\overline{\Omega}=B_1(0,0)$. Pelo 4.2, *u* também é harmônica em $B_1(0,0)$. Mas então, pelo princípio do máximo $u(P)=0,\forall P\in B_1(0,0)$, o que contradiz o dado $u(0,0)=1$. □

4.3 Funções Harmônicas: Propriedades da Média

Teorema da Divergência: (***Gauss-Ostrogradskii***)

Dado Ω aberto limitado, com $\partial\Omega$ de classe C^1(isto quer dizer que $\partial\mathbf{\Omega}$ admite uma parametrização por funções que são contínuas com derivadas de primeira ordem também contínuas) e dada $\vec{F}:\mathbf{\Omega}\to\Re^3,\vec{F}\in C^1(\mathbf{\Omega})$, então

$$\iiint_\Omega div\vec{F}\ dV=\iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{n}\ dS$$

OBS: Se $\vec{F}=\nabla u$, obtém-se a ***fórmula de Gauss***

$$\boxed{\iiint_\Omega \Delta u\ dV=\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}dS}$$

OBS: Se $\vec{F}=u\nabla v$, obtém-se que

$$div(u\nabla v)=\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v$$

o que, pelo teorema da divergência, implica na

Primeira Fórmula de Green:

$$\boxed{\iiint_\Omega u\Delta v\ dV+\iiint_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\ dV=\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial n}dS}$$

válida para $u\in C^1(\mathbf{\Omega})\cap C(\overline{\mathbf{\Omega}}),v\in C^2(\mathbf{\Omega})\cap C(\overline{\mathbf{\Omega}})$.

OBS: Se $u\in C^2(\mathbf{\Omega})\cap C(\overline{\mathbf{\Omega}})$, mudando u por v e subtraindo, obtém-se a **Segunda Fórmula de Green:**

$$\boxed{\iiint_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)dV=\iint_{\partial\Omega}(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})dS}$$

Definição 3: Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ aberto conexo limitado e uma função $u:\Omega\to\mathbb{R},u\in C(\overline{\Omega})$. Se para toda bola $B_R(P_0)\subset\Omega$ valer que

$$\boxed{u(P_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(P)dS}$$

onde $S=\{P\in\mathbb{R}^3:\left|P-P_0\right|=R\}$, então diz-se que *u* satisfaz a ***1ª propriedade da média*** em Ω.

Definição 4: Se nas mesmas condições valer que

$$\boxed{u(P_0) = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint\limits_{B_R(P_0)} u(P)dV}$$

onde $B_R(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^3 : |P - P_0| \leq R\}$, então diz-se que *u* satisfaz a ***2ª propriedade da média*** em Ω.

OBS: Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tem-se respectivamente que

1ª Propriedade da Média:

$$\boxed{u(P_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{|P-P_0|=R} u(P)ds}$$

2ª Propriedade da Média:

$$\boxed{u(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint\limits_{|P-P_0|\leq R} u(P)dS}$$

Proposição 1: *As duas propriedades da média são equivalentes.*

Prova: exercício.

Teorema 4.3: *O valor médio de qualquer função harmônica sobre qualquer esfera é igual a seu valor no centro da esfera.*

Prova: Sejam

$$\overline{B} = \overline{B}_R(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^3 : |P - P_0| \leq R\}$$

$$S = S_R(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^3 : |P - P_0| = R\}$$

e seja $v : B \to \mathbb{R}$ harmônica. Pela 1ª fórmula de Green, tomando $u \equiv 1$ tem-se que

$$0 = \iiint\limits_B \Delta v dV = \iint\limits_S \frac{\partial v}{\partial n} dS \qquad (3.1)$$

Para a esfera *S* a normal em *P* é dada pôr

$$\vec{n} = \frac{P - P_0}{R} = \left(\frac{x - x_0}{R}, \frac{y - y_0}{R}, \frac{z - z_0}{R} \right)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta sen\varphi \\ y = y_0 + rsen\theta sen\varphi \\ z = z_0 + r\cos\varphi \end{cases}$$

Então,

$$u(r, \theta, \varphi) = u(x_0 + r\cos\theta sen\varphi, y_0 + rsen\theta sen\varphi, z_0 + r\cos\varphi)$$

donde

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \frac{x-x_0}{R}u_x + \frac{y-y_0}{R}u_y + \frac{z-z_0}{R}u_z$$
$$= \cos\theta sen\varphi\ u_x + sen\theta sen\varphi\ u_y + \cos\varphi\ u_z$$
$$= \left.\frac{\partial}{\partial r}u(r,\theta,\varphi)\right|_{r=R}$$

De (3.1), obtém-se que

$$0 = \iint_S \frac{\partial}{\partial r}u(r,\theta,\varphi)dS$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_r(r,\theta,\varphi)\Big|_{r=R} R^2 sen\varphi d\varphi d\theta$$

e como *R*>0, então

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_r(r,\theta,\varphi)\Big|_{r=R} sen\varphi d\varphi d\theta = 0 \quad (3.2)$$

Como (3.2) é válida para todo *R*>0, considerando *R* como a própria variável r obtém-se que

$$\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(r,\theta,\varphi)sen\varphi d\varphi d\theta = 0$$

De modo que, definindo

$$I(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(r,\theta,\varphi)sen\varphi d\varphi d\theta$$

obtém-se que $I(r)$ é independente de *r*. Fazendo $r \to 0$, obtemos que

$$\lim_{r\to 0} I(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(0,\theta,\varphi)sen\varphi d\varphi d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(P_0)sen\varphi d\varphi d\theta$$
$$= 4\pi u(P_0).$$

Por outro lado, como *I* (*r*) é constante, tem-se que

$$4\pi u(P_0) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(R,\theta,\varphi)sen\varphi d\varphi d\theta$$

ou seja

$$4\pi R^2 u(P_0) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(R,\theta,\varphi)R^2 sen\varphi d\varphi d\theta$$
$$= \iint_S u(P)dS$$

ou seja

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(P)dS \qquad \square$$

4.4 Funções Harmônicas: Princípio de Dirichlet; Teorema de Harnack

A origem do Método Direto do Cálculo das Variações remonta os trabalhos de Gauss e Thompson de 1850. Utilizando esses trabalhos, Dirichlet e também Riemann "resolveram" o problema de Dirichlet para a equação de Laplace. Entretanto, a resolução apresentava certas falhas, conforme um contra-exemplo obtido por Weierstrass em 1870. Somente na virada do século, Hilbert reviveu o método colocando-o em bases sólidas. A partir daí, essa abordagem passou a ser conhecida como o ***Princípio de Dirichlet*** ou ***Método da Projeção Ortogonal***. Hoje em dia, a mesma espécie de idéias é utilizada em outros problemas de contorno para equações elípticas mais gerais.

Teorema 4.4: ***Princípio de Dirichlet***

Hipóteses: $\mathbf{\Omega} \subset \Re^3$ *domínio limitado*.

Tese: *Entre todas as funções* $v \in C^2(\mathbf{\Omega}) \cap C(\overline{\mathbf{\Omega}})$ *que satisfazem a condição de contorno de Dirichlet*

$$v\big|_{\partial\mathbf{\Omega}} = g \qquad (4.1)$$

onde $g \in C(\partial\mathbf{\Omega})$, *a que minimiza o seguinte funcional*

$$E(v) = \frac{1}{2}\iiint_{\mathbf{\Omega}} |\nabla v|^2 \, dV$$

é uma função harmônica satisfazendo (4.1).

Prova: Provaremos que se $u : \mathbf{\Omega} \to \Re$ é harmônica, satisfazendo (4.1), então $\forall v \in C^2(\mathbf{\Omega}) \cap C(\overline{\mathbf{\Omega}})$ satisfazendo (4.1), tem-se que

$$E(u) \le E(v).$$

Idéia Fundamental: representar $v = u - w,$ com $w\big|_{\partial\mathbf{\Omega}} = 0$.

Pela 1ª fórmula de Green,

$$\begin{aligned} E(v) = E(u-w) &= \frac{1}{2}\iiint_{\mathbf{\Omega}} |\nabla(u-w)|^2 \, dV \\ &= \frac{1}{2}\iiint_{\mathbf{\Omega}} (|\nabla u|^2 - 2\nabla u \cdot \nabla w + |\nabla w|^2) dV \\ &= E(u) + E(w) + \iiint_{\mathbf{\Omega}} w \Delta u dV - \iint_{\partial\mathbf{\Omega}} w \frac{\partial u}{\partial n} dS \\ &= E(u) + E(w) \ge E(u) \end{aligned}$$

o que fornece o resultado desejado. □

Outro resultado importante sobre funções harmônicas é devido a Harnack. Trata-se de um resultado sobre convergência de funções harmônicas. Conforme sabemos, pela linearidade do operador Laplaciano, uma combinação linear finita de funções harmônicas é uma função harmônica. A generalização desse fato seria obter que uma série convergente de funções harmônicas é também uma função harmônica.

Teorema: (***Primeiro Teorema de Harnack***)
Hipóteses: $\mathbf{\Omega} \subset \Re^3 (\Re^2)$ *aberto limitado.* $\{u_n\}_1^\infty$ *seqüência de funções harmônicas em* $\mathbf{\Omega}$.

Seja $g_n = u_n\big|_{\partial\Omega}, \forall n \geq 1$, *tal que* $g_n \to g$ *uniformemente em* $\partial\mathbf{\Omega}$.

Tese: *Existe uma função* $u : \mathbf{\Omega} \to \Re$ *tal que* $u_n \to u$ *uniformemente em* $\overline{\mathbf{\Omega}}$.

Além disso, u é harmônica em $\mathbf{\Omega}$ *satisfazendo a* $u\big|_{\partial\Omega} = g$.

Prova: Se u_n é harmônica em $\mathbf{\Omega}, \forall n \geq 1$, então $u_n \in C(\overline{\mathbf{\Omega}}), \forall n \geq 1$, e, pelo teorema 4.3, u_n satisfaz a 1ª propriedade da média. Além disso, pelo princípio do máximo-mínimo, u_n assume seus valores máximo e mínimo em $\partial\mathbf{\Omega}, \forall n \geq 1$.

Por hipótese, $g_n \to g$ uniformemente em $\partial\mathbf{\Omega}$. Logo, dado $\varepsilon > 0, \exists N_0 \in IN$ tal que

$$|g_m(P) - g_n(P)| < \varepsilon, \forall m,n \geq N_0, \forall P \in \partial\mathbf{\Omega}.$$

Por outro lado, pelo princípio do máximo-mínimo, tem-se que

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_m(P) - u_n(P)| \leq \max_{\partial\Omega} |g_m(P) - g_n(P)| < \varepsilon, \forall m,n \geq N_0,$$

o que implica em $\{u_n\}_1^\infty$ ser uniformemente convergente em $\overline{\mathbf{\Omega}}$. Então, existe uma função $u : \overline{\mathbf{\Omega}} \to \Re$ tal que $u \in C(\overline{\mathbf{\Omega}})$ e $u\big|_{\partial\Omega} = g$.

Falta provar que *u* é harmônica em $\mathbf{\Omega}$. Para isso, tomando um ponto qualquer $P \in \mathbf{\Omega}$ e $R > 0$ tal que $B_R(P) \subset \mathbf{\Omega}$, como u_n é harmônica em $\mathbf{\Omega}, \forall n \geq 1$, tem-se pela 1ª propriedade da média que

$$u_n(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\partial B_R(P)} u_n(Q)dS, \forall n \geq 1.$$

Como $u_n \to u$ uniformemente em $\overline{\mathbf{\Omega}}$, pode-se permutar a operação de limite com a integração e obter-se que

$$u(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\partial B_R(P)} u(Q)dS.$$

De modo que, *u* é harmônica em $\mathbf{\Omega}$. □

4.5 O Problema de Dirichlet no Disco

O objetivo desta seção é resolver o seguinte PVF: obter $u \in C^2(\mathbf{\Omega}) \cap C(\overline{\mathbf{\Omega}})$ tal que

$$\boxed{(D): \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\big|_{\partial\Omega} = g \end{cases}}$$

onde $g \in C(\partial\mathbf{\Omega})$, $\Omega = B_R(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$, $\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$. Neste caso, a geometria do domínio não permite aplicar diretamente o método da separação de variáveis. Entretanto, utilizando coordenadas polares será possível aplicar o método. De fato, tomando

$$x = r\,\mathbf{cos}\,\theta\,,\ y = r\,\mathbf{sen}\theta\,,\, 0 \le r \le R, 0 \le \theta < 2\pi$$

obtém-se que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

para $r \neq 0$ e o problema (*D*) se transforma no seguinte problema de Dirichlet

$$(\tilde{D}): \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0\,, 0 < r < R, \theta \in \Re \\ u(R,\theta) = g(\theta) \quad , \quad \theta \in \Re \end{cases}$$

ou equivalentemente no problema de Dirichlet

$$(\hat{D}): \begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0\,, 0 \le r < R, \theta \in \Re \\ u(R,\theta) = g(\theta)\,, \quad \theta \in \Re \end{cases}$$

Procurando uma solução da forma

$$u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$$

obtém-se que

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda$$

De modo que, somos levados ao seguinte par de EDO's

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 & \text{(a)} \\ T'' + \lambda T = 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

Por definição, temos que ter $u(r,\theta) = u(r,\theta + 2\pi)$, então *u* tem que ser periódica em θ de período 2π. De modo que,

$$\begin{aligned} T(\theta + 2\pi) = T(\theta) \Rightarrow T(0) = T(2\pi) \\ T'(\theta + 2\pi) = T'(\theta) \Rightarrow T'(0) = T'(2\pi) \end{aligned} \text{(c)}$$

e de (b), obtém-se que

$$\lambda T = -T'' \Rightarrow \lambda T^2 = -T''T \Rightarrow \lambda\int_0^{2\pi} T^2(\theta)d\theta = -\int_0^{2\pi} T''(\theta)T(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} (T'(\theta))^2\, d\theta$$

donde $\lambda \ge 0$. Como a EDO (a) é de Euler, obtém-se que

$$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} R(r) = A_0 \,\mathbf{ln}\, r + B_0 \\ T(\theta) = C_0 + D_0\theta \end{cases}$$

$$\lambda > 0 \Rightarrow \begin{cases} R(r) = Ar^{\sqrt{\lambda}} + Br^{-\sqrt{\lambda}} \\ T(\theta) = C\,\mathbf{cos}\sqrt{\lambda}\theta + D\,\mathbf{sen}\sqrt{\lambda}\theta \end{cases}$$

Resolvendo o Problema de Sturm-Liouville (b)+(c), obtém-se que: $\lambda = n^2, n = 0,1,2,...$.
Por outro lado, para $\lambda = 0$ obtém-se de (c) que $D_0 = 0$, e , como a origem é um ponto de $\mathbf{\Omega}$ e se quer $u \in C^2(\mathbf{\Omega}) \cap C(\overline{\mathbf{\Omega}})$, portanto limitada em $\overline{\mathbf{\Omega}}$, necessariamente tem-se que ter $A_0 = B = 0$. De modo que,

$$u_n(r,\theta) = B_0 A + r^n (C_n \cos n\theta + D_n \operatorname{sen} n\theta)$$
$$= \frac{a_0}{2} + r^n (C_n \cos n\theta + D_n \operatorname{sen} n\theta)$$

o que, pelo princípio da superposição, leva a solução formal

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (C_n \cos n\theta + D_n \operatorname{sen} n\theta)$$

que será solução se a série convergir de forma conveniente e, além disso se

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (C_n \cos n\theta + D_n \operatorname{sen} n\theta) \ , 0 \le \theta \le 2\pi \, .$$

Então, se $g(\theta)$ for contínua com derivada contínua por partes em $]-\pi,\pi[$ e $g(-\pi) = g(\pi)$ a série de Fourier de *g* convergirá para sua extensão periódica, de período 2π, em toda reta. Conforme sabemos, tem-se que sua série de Fourier é dada por

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta$$

onde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta) \cos n\theta d\theta = R^n C_n \ , \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta = R^n D_n \ , \forall n \ge 1. \text{(5.1)}$$

Substituindo os valores de C_n, D_n no candidato formal a solução, obtém-se

$$\boxed{u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{R})^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)} \ \text{(5.2)}$$

Conclusão: Obtiveram-se os seguintes fatos

F1) Uma seqüência de funções harmônicas em Ω, $\{u_n(r,\theta)\}_0^{\infty}$, dadas por

$$u_n(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\frac{r}{R})^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta), \forall n \ge 0 \, .$$

F2) Se $r = R$, tem-se que

$$g_n(\theta) = u_n(R,\theta) = \frac{a_n}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta), \forall n \ge 0$$

satisfaz $u_n|_{\partial\Omega} = g_n, \forall n \ge 0$, e $g_n \to g$ uniformemente em $\partial\Omega$.

De modo que, pelo teorema de Harnack, existe $\tilde{u}(r,\theta)$ harmônica em Ω tal que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(r,\theta) = \tilde{u}(r,\theta)$$

sendo a convergência uniforme. Por outro lado, tem-se que

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{r}{R})^n(a_n\cos n\theta+b_n\,\mathrm{sen}\,n\theta)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\frac{r}{R})^n(a_n\cos n\theta+b_n\,\mathrm{sen}\,n\theta)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}u_n(r,\theta)$$

Pela unicidade do limite, conclui-se que a solução formal dada por (5.2), com coeficientes dados por (5.1) é de fato solução do problema de Dirichlet (*D*).

OBS: Se $r=0$, então

$$u(0,\theta)=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta)d\theta\,.$$

Confirmando a propriedade da média para funções harmônicas.

Teorema: (Fórmula de Poisson)

A solução dada por (5.2)

$$\boxed{u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{R})^n(a_n\cos n\theta+b_n\,\mathrm{sen}\,n\theta)}$$

para $0\le r<R, 0\le\theta\le 2\pi$, pode ser expressa por

$$\boxed{u(r,\theta)=\frac{(R^2-r^2)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\phi)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi}$$

Prova: Substituindo as expressões dadas por (5.1) para os coeficientes de Fourier de *g*, obtem-se que

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)d\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\cos n\varphi d\varphi\right)\cos n\theta+\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\,\mathrm{sen}\,n\varphi d\varphi\right)\mathrm{sen}\,n\theta\right]$$

levando em conta a convergência uniforme, obtem-se que

$$u(r,\theta)=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left(\cos n\varphi\cos n\theta+\mathrm{sen}\,n\varphi\,\mathrm{sen}\,n\theta\right)\right]g(\varphi)d\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(\theta-\varphi)\right]g(\varphi)d\varphi$$

Pela fórmula de Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n\omega=\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in\omega}\right]$$

Como se tem $r < R$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in\omega} = \frac{1}{1-(\frac{r}{R})e^{i\omega}} - 1 = \frac{(\frac{r}{R})e^{i\omega}}{1-(\frac{r}{R})e^{i\omega}} = (\tfrac{r}{R})e^{i\omega}\frac{\overline{(1-(\frac{r}{R})e^{i\omega})}}{\left|1-(\frac{r}{R})e^{i\omega}\right|^2} = (\tfrac{r}{R})e^{i\omega}\frac{(1-(\frac{r}{R})e^{-i\omega})}{\left|1-(\frac{r}{R})e^{i\omega}\right|^2} = \frac{(\frac{r}{R})e^{i\omega}-(\frac{r}{R})^2}{\left|1-(\frac{r}{R})e^{i\omega}\right|^2}$$

De modo que,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\omega = \mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in\omega}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{(\lambda\cos\omega-\lambda^2)+i\lambda\,\mathrm{sen}\,\omega}{(1-\lambda\cos\omega)^2+\lambda^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega}\right] = \frac{\lambda\cos\omega-\lambda^2}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}$$

O que implica em

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{(\frac{r}{R})\cos n(\theta-\varphi)-(\frac{r}{R})^2}{(\frac{r}{R})^2+1-2(\frac{r}{R})\cos(\theta-\varphi)}\right]g(\varphi)d\varphi = \frac{\left(1-(\frac{r}{R})^2\right)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi)}{\left((\frac{r}{R})^2+1-2(\frac{r}{R})\cos(\theta-\varphi)\right)}d\varphi$$

$$= \frac{(R^2-r^2)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi)}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\varphi)}\,d\varphi$$

□

4.6 O Problema de Dirichlet no Retângulo

No caso mais simples em que o domínio é o retângulo

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<a, 0<y<b\}\ .$$

cuja fronteira se compõe de quatro segmentos de reta, podemos ter quatro condições de fronteira distintas impostas separadamente em cada um dos lados do retângulo e com isso somos levados ao seguinte Problema de Dirichlet;

$$(D):\begin{cases}\Delta u = 0 & ,(x,y)\in\Omega\\ u(x,0)=f_1(x), u(x,b)=f_2(x) & ,0<x<a\\ u(0,y)=g_1(y), u(a,y)=g_2(y), & 0<y<b\end{cases}$$

Como queremos obter $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ então precisamos impor certas condições sobre os dados de fronteira para que tenhamos u contínua na fronteira.
Condições de compatibilidade:

$$f_1(0)=g_1(0),\ f_1(a)=g_2(0),\ f_2(0)=g_1(b),\ f_2(a)=g_2(b)\ .$$

Método de resolução: decompor em quatro problemas de Dirichlet, cada um deles obtido anulando-se três condições de fronteira e preservando uma respectivamente. A solução do problema original será a soma das quatro soluções obtidas. Vamos resolver o primeiro dos quatro.

$$(D)_1:\begin{cases} \Delta u = 0 \quad ,(x,y)\in\Omega \\ u(x,0)=f_1(x), u(x,b)=0, 0\le x\le a \\ u(0,y)=u(a,y)=0 \qquad ,0\le y\le b \end{cases}$$

Supondo que

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

Substituindo na EDP obtem-se que

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$

Assumindo que $f_1 \neq 0$ podemos procurar solução não trivial e portanto dividir por u para obter

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=0 \Rightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}: \frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda=-\frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad .$$

Com isso somos levados ao seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0, 0<x<a \\ Y''(y)+\lambda Y(y)=0, 0<y<b \end{cases}$$

Impondo o segundo par de condições de fronteira obtem-se que

$$X(0)Y(y)=X(a)Y(y)=0, 0<y<b \Rightarrow X(0)=X(a)=0 \ .$$

Somos levados ao seguinte Problema Espectral:

$$(PVF):\begin{cases} X''(x)=\lambda X(x), 0<x<a \\ X(0)=X(a)=0 \end{cases}$$

O qual, conforme sabemos possui o seguinte auto-sistema;

$$\Lambda=\left\{\lambda_n=-\frac{n^2\pi^2}{a^2}; X_n(x)=\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\right\}_{n=1}^{\infty} \quad .$$

Retornando a segunda EDO obtemos a família de EDO's;

$$Y''(y)-\frac{n^2\pi^2}{a^2}Y(y)=0, 0<y<b, n\ge 1 \ .$$

Que possuem a seguinte solução geral

$$Y_n(y)=A_n e^{n\pi y/a}+B_n e^{-n\pi y/a}, n\ge 1 \ .$$

Impondo o primeiro par de condições de fronteira obtemos que

$$X_n(x)Y_n(b)=0, 0<x<a \Rightarrow Y_n(b)=0, \forall n\ge 1 \Rightarrow A_n=-B_n e^{-2n\pi b/a}, n\ge 1 \ .$$

O que implica em

$$Y_n(y)=-B_n e^{-2n\pi b/a}e^{n\pi y/a}+B_n e^{-n\pi y/a}=-B_n e^{-n\pi b/a}e^{n\pi(y-b)/a}+B_n e^{-n\pi b/a}e^{-n\pi(y-b)/a}$$

$$=-B_n e^{-n\pi b/a}\left[e^{n\pi(y-b)/a}-e^{-n\pi(y-b)/a}\right]=-B_n e^{-n\pi b/a}\operatorname{senh}\frac{n\pi(y-b)}{a}, \forall n\ge 1$$

De modo que, obtem-se a seguinte sequência de funções harmônicas satisfazendo as condições de fronteira;

$$u_n(x,y)=C_n e^{-n\pi b/a}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\operatorname{senh}\frac{n\pi(y-b)}{a} \quad ,n\ge 1 \ .$$

Aplicando o Princípio da superposição generalizado obtemos como candidato a solução do problema $(D)_1$ a seguinte função;

$$\boxed{u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi b/a}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{a}\,\text{senh}\,\frac{n\pi(y-b)}{a}}$$

Impondo a condição de fronteira não homogênea restante, temos que ter;

$$\boxed{f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi b/a}\,\text{senh}(\frac{-n\pi b}{a})\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{a}x \quad ,0\le x\le a}$$

Como já temos f_1 contínua, basta pedirmos f_1' contínua por partes em $]0,a[$, para obtermos que

$$C_n e^{-n\pi b/a}\,\text{senh}(-\frac{n\pi b}{a})=\frac{2}{a}\int_0^a f_1(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{a}x dx\triangleq b_n \;,n\ge 1$$

ou seja,

$$C_n e^{-n\pi b/a}=\frac{2}{\text{senh}(-\frac{n\pi b}{a})}\int_0^a f_1(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{a}x dx=\frac{-b_n}{\text{senh}\,\frac{n\pi b}{a}},n\ge 1\cdot$$

Com isso obtemos como solução formal

$$\boxed{u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\text{senh}(n\pi b/a)}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{a}x\,\text{senh}\,\frac{n\pi}{a}(b-y)}$$