Optimal Control of the FitzHugh-Nagumo System

Paulo M. D. de Magalhães

Abstract

This work deals with internal optimal control of a generalized FitzHugh-Nagumo system. Existence of optimal state-control pairs is proved and an optimal control necessary optimality conditions is derived. Uniqueness and stability for the generalized FitzHugh-Nagumo system is obtained.

Modelo Original (1962) FitzHugh+Nagumo-Arimoto-Yoshizawa

$$(FN)_o : \begin{cases} u_t = \Delta u - u(1-u)(a-u) - v \\ v_t = \sigma u - \gamma v \end{cases}$$

$$\sigma > 0, \gamma \geq 0, 0 < a < 1, x \in \mathbb{R}$$

u = voltagem através da membrana

v =permeabilidade da membrana

Modelo Generalizado (1990) D.E.Jackson

$$(FN):\begin{cases} u_t = \Delta u - F(\psi_i;u) - v + g_1 \\ v_t = \sigma u - \gamma v + g_2 \end{cases}$$

$$(x,t) \in Q = \Omega \times]0,T[, \Omega \subset \mathbb{R}^N$$

Ω aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe C^∞

$F(\psi_i;u) = (u-\psi_1)(u-\psi_2)(u-\psi_3), \psi_i \in L^\infty(Q)$

u e v variáveis de estado, g_1, g_2 controles

Notação e Resultados Auxiliares

- Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com $\partial\Omega$ de classe C^2.
- $H^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : u, D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$ espaços de Sobolev

com norma e produto interno

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}, (u,v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx$$

- $W_2^{2,1}(Q) = \{u \in \mathcal{D}'(Q) : u \in L^2(0,T; H^2(\Omega)), D_t u \in L^2(Q)\}$ espaço de Hilbert com norma e produto interno

$$\|u\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} = \int_0^T (\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \|D^\alpha u(t)\|^2_{L^2(\Omega)})dt + \|D_t u\|^2_{L^2(Q)}$$

$$(u,v)_{W_2^{2,1}(Q)} = (u,v)_{2,Q} + (D_t u, D_t v)_{0,Q}$$

Notação e Resultados Auxiliares

- $W_{0,2}^{2,1}(Q) = \overline{C_0^\infty(Q)}^{\|\cdot\|_{W_2^{2,1}(Q)}}$
- $H^1(0,T;L^2(\Omega)) = \{v \in \mathcal{D}'(Q) : v, D_t v \in L^2(Q)\}$ espaço de

Hilbert com norma e produto interno

$$\|v\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} = \|v\|_{L^2(Q)} + \|D_t v\|_{L^2(Q)}, (u,v)_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} = (u,v)_{L^2(Q)} + (u',v')_{L^2(Q)}$$

- $W(0,T) = \{u : u \in L^{p_0}(0,T;B_0), D_t u \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$

Existência dos estados

Teorema 2.1: **Hipóteses:(N≤3)**

(H1) $u_0 \in H_0^1(\Omega), v_0 \in H^1(\Omega)$

(H2) $\psi_i \in L^\infty(Q), i = 1,2,3, g_i \in L^2(Q), i = 1,2$

Tese: $\forall \varepsilon \in]0,1[$, existe uma solução $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ para o seguinte PVIF

$$(FN)_\varepsilon : \begin{cases} u_t^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon - F(\psi_i; u^\varepsilon) - v^\varepsilon + g_1 \\ v_t^\varepsilon = \varepsilon \Delta v^\varepsilon + \sigma u^\varepsilon - \gamma v^\varepsilon + g_2 \\ u^\varepsilon(0) = u_0, v^\varepsilon(0) = v_0 \quad in \Omega \\ u^\varepsilon\big|_\Sigma = 0, \Sigma = \partial\Omega \times]0,T] \end{cases}$$

Prova: Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder

E *Banach*, $T:[0,1]\times E\to E$ *continua, compacta*, $T(0,x)=x_0, \forall x\in E.$

Se $\exists M<+\infty : \forall(\lambda,x)\in[0,1]\times E$, *vale* $T(\lambda,x)=x \Rightarrow \|x\|\le M$

Então, $T_1 : E\to E : x\mapsto T_1(x)=T(1,x)$ *possui um ponto fixo.*

$$T:[0,1]\times L^q(Q)\times L^p(Q)\to L^q(Q)\times L^p(Q)$$

$$(\lambda,w,z)\mapsto T(\lambda,w,z)=T_\lambda(w,z)=(u^\varepsilon,v^\varepsilon)$$

onde ε fixo em $]0,1[$ e $(u^\varepsilon,v^\varepsilon)$ é uma solução do $PVIF$

$$(P_\varepsilon):\begin{cases} u_t^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon - \lambda F(\psi_i;w)+\lambda(-z+g_1) \\ v_t^\varepsilon = \varepsilon\Delta v^\varepsilon + \lambda(\sigma w-\gamma z+g_2) \\ u^\varepsilon(0)=u_0, v^\varepsilon(0)=v_0, u^\varepsilon\big|_\Sigma = 0 \end{cases}$$

Teorema 2.2: $u^{\varepsilon} \to u\,,\, v^{\varepsilon} \to v$ fraco em $W_2^{2,1}(Q)$ qdo. $\varepsilon \to 0^{+}$

onde $(u,v) \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(Q) \times H^1(0,T;L^2(\Omega))$ é a única solução do *PVIF*

$$(FN):\begin{cases} u_t = \Delta u - F(\psi_i : u) - v + g_1 \\ v_t = \sigma u - \gamma v + g_2 \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \text{ in } \Omega \\ u\big|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

Existência dos estados adjuntos

- **Teorema 2.3:**

  Hipótese:(N≤3)

(H1) $$(u,v) \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(Q) \times H^1(0,T;L^2(\Omega))$$

é uma solução do *PVIF (FN)* .

(H2) $$(u_d, v_d) \in [L^2(Q)]^2$$

Tese: ∃! solução $(p,q) \in W_2^{2,1}(Q) \times H^1(0,T;L^2(\Omega))$

do sistema adjunto linearizado

$$(FN)_L^* : \begin{cases} -p_t = \Delta p - F_u(\psi_i : u)p + \sigma q + u - u_d \\ -q_t = -p - \gamma q + v - v_d \\ p(T) = q(T) = 0 \; in \; \Omega, \; p\big|_\Sigma = 0 \end{cases}$$

Estabilidade dos estados em relação aos controles

Teorema 2.4: ***Hipóteses:***

(H1) $(g_i, g_i^*) \in [L^2(Q)]^2, i = 1,2$

(H2) $(u_i, v_i) \in W_2^{2,1}(Q) \times H^1(0,T; L^2(\Omega))$ respectivas soluções de *(FN)*

Tese:

$$\left\|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\right\|_{W_2^{2,1}(Q)\times H^1(0,T:L^2(\Omega))} \leq C\left(\left\|g_1 - g_1^*\right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\|g_2 - g_2^*\right\|_{L^2(Q)}^2\right)^{1/2}$$

Estabilidade dos estados em relação aos controles

Conseqüências

- Unicidade da solução do Teorema 2.2.
- $\mathbb{F} : L^2(Q) \times L^2(Q) \to W_2^{2,1}(Q) \times H^1(0,T;L^2(\Omega))$

$$(g_1, g_2) \mapsto (u,v)$$

  é Lipschitz contínua.

Fréchet diferenciabilidade de $\mathbb{F}$

Teorema 3.1: ***Hipótese:***

$$(g_1, g_2), (\delta g_1, \delta g_2) \in [L^2(Q)]^2, \qquad (g_1 + \delta g_1, g_2 + \delta g_2) \in [L^2(Q)]^2$$

Tese:

$$\left\| \mathbb{F}(g_1 + \delta g_1, g_2 + \delta g_2) - \mathbb{F}(g_1, g_2) - \mathbb{F}'(g_1, g_2).(\delta g_1, \delta g_2) \right\|_{W_2^{2,1}(Q) \times H^1(0,T:L^2(\Omega))}$$

$$\leq C \left\| (\delta g_1, \delta g_2) \right\|_{L^2(Q) \times L^2(Q)}$$

onde $\mathbb{F}'(g_1, g_2)$ *é um op. linear tq.* $(w, z) = \mathbb{F}'(g_1, g_2).(\delta g_1, \delta g_2)$

é a solução do PVIF

$$(FN)_L : \begin{cases} w_t = \Delta w - F_u(\psi_i : u) w - z + \delta g_1 \\ z_t = \sigma w - \gamma z + \delta g_2 \\ w(x,0) = z(x,0) = 0, x \in \Omega, w|_\Sigma = 0 \end{cases}$$

O Problema de Controle Ótimo

Seja $\mathcal{G}_{ad}$ um convexo fechado não-vazio de $L^2(Q)\times L^2(Q)$

Definição: (u,v,g_1,g_2) é uma ***quádrupla admissível*** se $(u,v)\in W_2^{2,1}(Q)\times H^1(0,T:L^2(\Omega))$ é solução de *(FN)* com (g_1,g_2) $\in \mathcal{G}_{ad}$. Então o ***conjunto admissível*** para *(FN)* e o funcional custo

$$J(u,v,g_1,g_2)=\tfrac{1}{2}\int_Q|u-u_d|^2dxdt+\tfrac{1}{2}\int_Q|v-v_d|^2dxdt+\tfrac{\alpha_1}{2}\int_Q|g_1|^2dxdt+\tfrac{\alpha_2}{2}\int_Q|g_2|^2dxdt$$

onde os parâmetros α_1,α_2 calibram a importância dos termos aparecendo no funcional, é dado por

$$\mathcal{U}_{ad}=\{(u,v,g_1,g_2):(u,v,g_1,g_2)\,é\;admissível\}$$

O ***problema de controle ótimo*** (***PCO***)será então:

O Problema de Controle Ótimo

Obter $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{g}_1, \hat{g}_2) \in \mathscr{U}_{ad}$ tal que

$$J(\hat{u}, \hat{v}, \hat{g}_1, \hat{g}_2) = \inf_{(u,v,g_1,g_2)\in\mathscr{U}_{ad}} J(u, v, g_1, g_2)$$

Teorema 4.1: *Assumindo as condições dos teoremas 2.1, 2.2 e que* $u_d, v_d \in L^2(Q)$ *. Então existe uma única quádrupla ótima* $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{g}_1, \hat{g}_2) \in \mathscr{U}_{ad}$ tal que

$$J(\hat{u}, \hat{v}, \hat{g}_1, \hat{g}_2) = \inf_{(u,v,g_1,g_2)\in\mathscr{U}_{ad}} J(u, v, g_1, g_2)$$

Condições Necessárias de Otimalidade

- **Teorema 4.2:** *Seja* $(\hat{g}_1, \hat{g}_2)$ *um controle ótimo para* ***PCO***.*Então existe*

$$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{q}, \hat{g}_1, \hat{g}_2) \in [W_2^{2,1}(Q) \times H^1(0,T : L^2(\Omega))]^2 \times [L^2(Q)]^2$$

Satisfazendo o sistema de otimalidade ***(SO)***

$$\begin{cases} \hat{u}_t = \Delta\hat{u} - F(\psi_i : \hat{u}) - \hat{v} + \hat{g}_1, \quad \hat{u}(x,0) = u_0(x), \hat{u}\big|_\Sigma = 0 \\ \hat{v}_t = \sigma\hat{u} - \gamma\hat{v} + \hat{g}_2, \qquad \hat{v}(x,0) = v_0(x) \\ -\hat{p}_t = \Delta\hat{p} - F_u(\psi_i : \hat{u})\hat{p} + \sigma\hat{q} + \hat{u} - u_d, \ \hat{p}(x,T) = 0, \ \hat{p}\big|_\Sigma = 0 \\ -\hat{q}_t = -\hat{p} - \gamma\hat{q} + \hat{v} - v_d, \qquad \hat{q}(x,T) = 0 \\ \int_Q \left[(\hat{p} + \alpha_1\hat{g}_1)(g_1 - \hat{g}_1) + (\hat{q} + \alpha_2\hat{g}_2)(g_2 - \hat{g}_2)\right] dx\,dt \geq 0 \\ \qquad \forall (g_1, g_2) \in \mathcal{G}_{ad} \end{cases}$$

Referências

- [C] Choen,H. Nonlinear Diffusion Problems.MAA Studies in Matemáticas,vol.7,(1971),27-64.
- [F] Fursikov,A.V.*Optimal Control of Distributed Systems.Theory and Applications*. American Mathematical Society,(2000).
- [H] Hadeler,K.P. Nonlinear Diffusion Equations in Biology .In: Lectures Notes in Mathematics ,vol.564,Springer-Verlag,(1976),163-206.

Referências

- [Ha] Hastings ,S.Some Mathematical Problems from Neurobiology .AM.Monthly 82,(1975),881-895.
- [Jl1]Lions,J-L.*Quelques méthodes de resolution des problèms aux limites non lineaires* .Gauthier –Villars ,1969.
- [JL2]Lions,J-L.*Control of distributed singular systems*.Gauthier -Villars,1985.

Referências

- [LM]Lions-Magenes. *Non-Homogeneous Boundary Value Problem and Applications* .Springer-Verlag,1972.
- [L z]Ladezenskaja-Solonnikov-Uraltseva .*Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. AMS , 1968.
- [Mi]Miranda,M. M.Traço para o dual dos espaços de Sobolev.pre-print, IM-UFRJ.

Referências

- [P]Magalhães –Brandão –Cara -Medar. Some Theoretical Analysis and Control Results for the FitzHugh-Nagumo Equations. UNICAMP, (2005), pre-print.