

René Thom

Teoria das Catástrofes

Teoria das Catástrofes

Uma Apresentação Elementar

- ◆ Devido ao alto grau de especialização e dificuldade das teorias que habitualmente ocupam a atenção dos matemáticos contemporâneos, poucas exibem resultados que, a curto ou médio prazo, atinjam a comunidade científica em geral. Destes resultados, uma fração ínfima transcende o terreno dos periódicos especializados e, pela expectativa e curiosidade que desperta, adquire importância jornalística, chegando, embora com inevitáveis simplificações, ao conhecimento do leigo.

Teoria das Catástrofes

Uma Apresentação Elementar

- ◆ A Teoria das Catástrofes, idealizada pelo Matemático francês René Thom, é, sem dúvida, o exemplo mais recente e notável deste fenômeno, do qual fomos testemunhas na década de setenta. Os fundamentos da Teoria das Catástrofes, sua interação com outros campos da Matemática, Física, Biologia, Linguística e Filosofia, encontram-se no fascinante livro de Thom, “**Stabilité Structurelle et Morphogénèse**” (1972). A Teoria das Catástrofes apresenta diversos aspectos compatíveis com as diferentes acepções que o termo *teoria* admite.

Teoria das Catástrofes

Uma Apresentação Elementar

- ◆ Primeiramente, constitui teoria no sentido de um “*grupo coerente de proposições gerais usadas como princípios para explicação de uma determinada classe de fenômenos*”. Neste contexto, assim como a Teoria da Gravitação de Newton formula-se para explicar os fenômenos de atração entre os corpos celestes e sua evolução espaço-temporal, a Teoria das Catástrofes aborda descrição, explicação e classificação dos fenômenos descontínuos ou *catástrofes* na terminologia de Thom.

Teoria das Catástrofes

Uma Apresentação Elementar

- ◆ No terreno puramente matemático, onde o termo teoria designa “*um corpo de princípios e teoremas sobre um determinado objeto matemático*”, a Teoria das Catástrofes tem como objeto de estudo as famílias de funções diferenciáveis dependentes de parâmetros. Estas famílias, convenientemente elaboradas, fornecem um dos instrumentos mais adequados para a descrição e classificação das catástrofes.

Teoria das Catástrofes

Uma Apresentação Elementar

- ◆ Em um outro contexto, o termo *teoria* designa “*um grupo de proposições de base para argumentação, pesquisa e experimentação, com objetivo de encontrar a verdade*”. A Teoria das Catástrofes não deixa de apresentar, também, este aspecto, que através de regras específicas a tornam um método de pesquisa científica.

O que são as Catástrofes

- ◆ São aqueles fenômenos cujos estados internos ou cujas formas exibem mudanças abruptas em função de suaves variações de determinados parâmetros (variáveis externas). Estas catástrofes não tem, necessariamente, a conotação de desastres, podem ser fenômenos tais como a ebulição da água, a arrebentação de uma onda, a configuração final de um terreno sob ação da erosão, a mudança de atitude de ataque para fuga (e vice-versa) nos animais sob ação da raiva e do medo, as diversas fases na evolução de um embrião, isso para citar apenas alguns exemplos.

A Teoria dos Modelos

◆ Modelos Formais:

Um sistema de formas em evolução constitui um processo “*formalizável*” se existe um sistema formal P (no sentido da lógica formal) satisfazendo as seguintes condições:

1. Cada estado A do processo fenomenológico pode ser parametrizado por um conjunto de proposições a do sistema formal P .

A Teoria dos Modelos

2. Se o estado A é transformado no estado B , então B pode ser parametrizado por um conjunto b de P tal que b pode ser deduzido de a em P .

Um tal modelo não é necessariamente determinístico, pois um conjunto a de proposições de P pode implicar um grande número de conclusões formalmente diferentes. Entretanto, existe uma aplicação bijetiva h levando as proposições de P sobre o conjunto das formas no processo evolutivo.

Teoria das Catástrofes

A Teoria dos Modelos

- ◆ Como consequência da formalização de qualquer processo fenomenológico, todos modelos dividem-se *a priori* em duas partes distintas: uma **estática** (**kinematic**), cujo objetivo é parametrizar as formas ou estados e outra **dinâmica**, cujo objetivo é descrever a evolução temporal dessas formas. No caso de um processo formalizável a parte estática é dada pelo sistema formal P junto com a aplicação h . A parte dinâmica, caso seja conhecida, será dada pelas probabilidades de transição entre dois estados.

A Teoria dos Modelos

◆ Modelos Contínuos:

Neste caso, é natural tomar P como sendo um espaço topológico com a convenção que, se um ponto do sistema está fora de um certo conjunto fechado K de P (*o conjunto das catástrofes*), a natureza qualitativa do estado não varia para deformações suficientemente pequenas deste estado. Cada forma do processo corresponde a uma componente conexa $P-K$.

Teoria das Catástrofes

A Teoria dos Modelos

Se P possui uma estrutura diferenciável a dinâmica do processo será dada por um campo vetorial X sobre P . Teoremas de existência e unicidade para soluções de equações diferenciais com coeficientes diferenciáveis forneceram o que é, sem dúvida, o paradigma do determinismo científico. A possibilidade de usar um modelo diferencial é, para René Thom, a justificativa final para o uso de métodos quantitativos na ciência.

O conjunto das Catástrofes

- ◆ Uma *catástrofe* é uma mudança descontínua ou súbita dos estados internos de um processo na sua transição entre dois regimes estáveis, quando os parâmetros externos variam suavemente na vizinhança de um ponto chamado *ponto de catástrofe* ou *ponto catastrófico*.
- ◆ René Thom propôs o seguinte modelo geral para parametrizar os estados locais de um sistema: o espaço dos observáveis M contém um subconjunto fechado K (o *conjunto das catástrofes*), tal que

O conjunto das Catástrofes

enquanto um ponto representativo do sistema não encontra o conjunto K , a natureza local do sistema não muda. A idéia essencial é que a estrutura local de K , a topologia de suas singularidades, é determinada por uma dinâmica subjacente definida sobre M que é em geral impossível de ser determinada. A evolução do sistema será definida por um campo vetorial X

O conjunto das Catástrofes

sobre M , o qual determinará a dinâmica macroscópica. Sempre que um ponto entrar em K , ocorrerá uma descontinuidade na natureza do sistema que será interpretada como uma mudança na forma, ou seja uma *morfogênese*.

A “Abordagem Catastrófica”

- ◆ *A partir de um exame macroscópico da morfogênese de um processo e de um estudo, a princípio local, de suas singularidades, tenta-se reconstruir a dinâmica que gera o processo.*

A Teoria das Catástrofes

Áreas Matemáticas Envolvidas

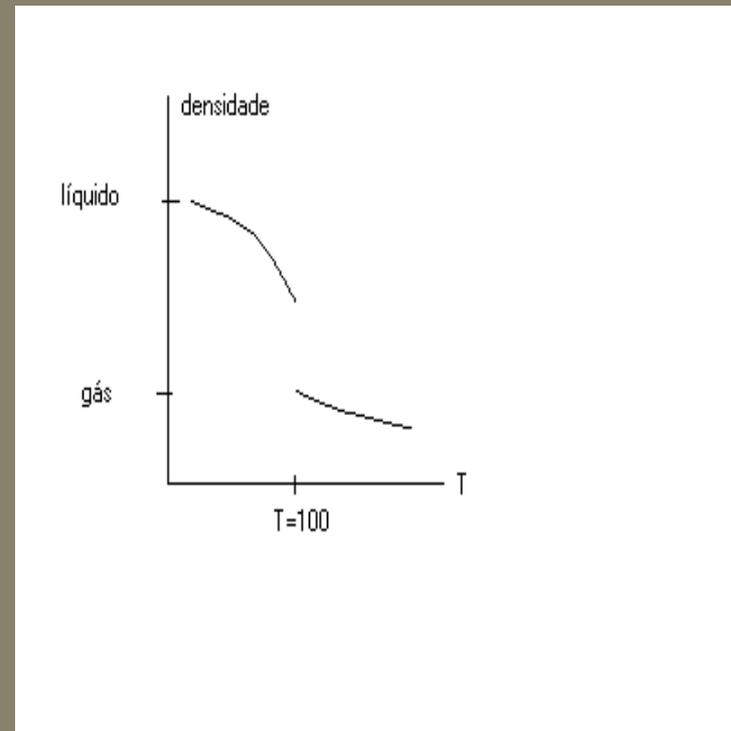
- ◆ A sistematização dos fundamentos matemáticos da Teoria das Catástrofes somente foi possível usando os recursos mais poderosos da Análise Diferencial (Teorema de Preparação), da Topologia Diferencial (Singularidades de Aplicações Diferenciáveis) e da Teoria Qualitativa dos Sistemas Dinâmicos (Estabilidade Estrutural e Bifurcações).

Exemplos de Catástrofes

E.C. Zeeman

- ◆ Mudança de estado de uma substância por aumento do calor, sob pressão cte.

A variação lenta da temperatura T , em torno do pto. $T=100^{\circ}$, produz uma mudança súbita da densidade.

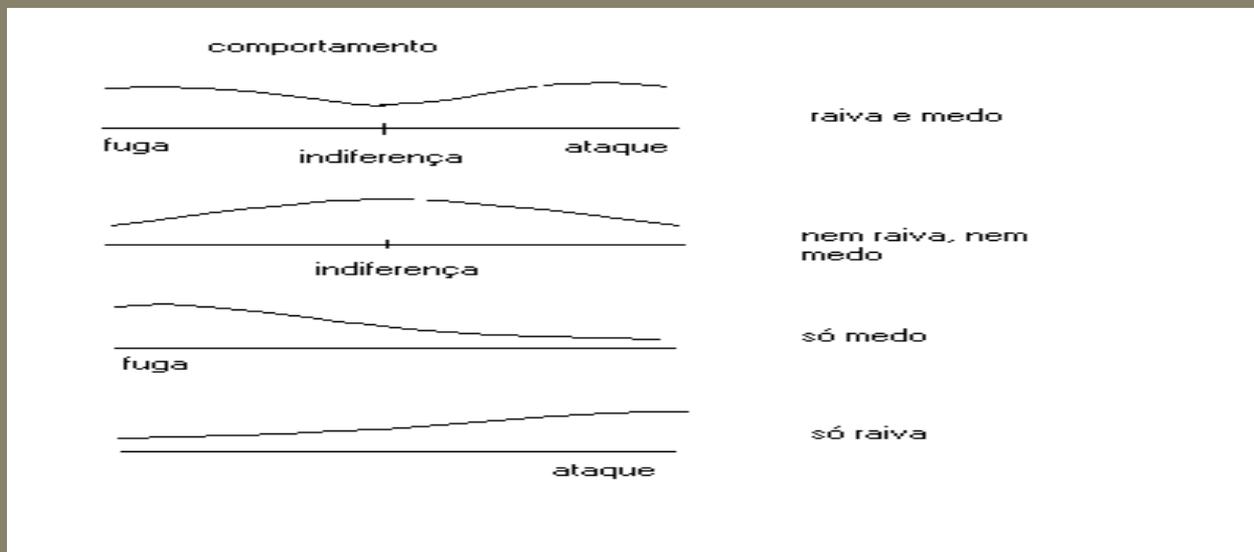


Exemplos de Catástrofes

E.C. Zeeman

◆ Catástrofe no comportamento animal.

Trata-se de descrever o comportamento de cães sob o efeito do medo e da raiva.



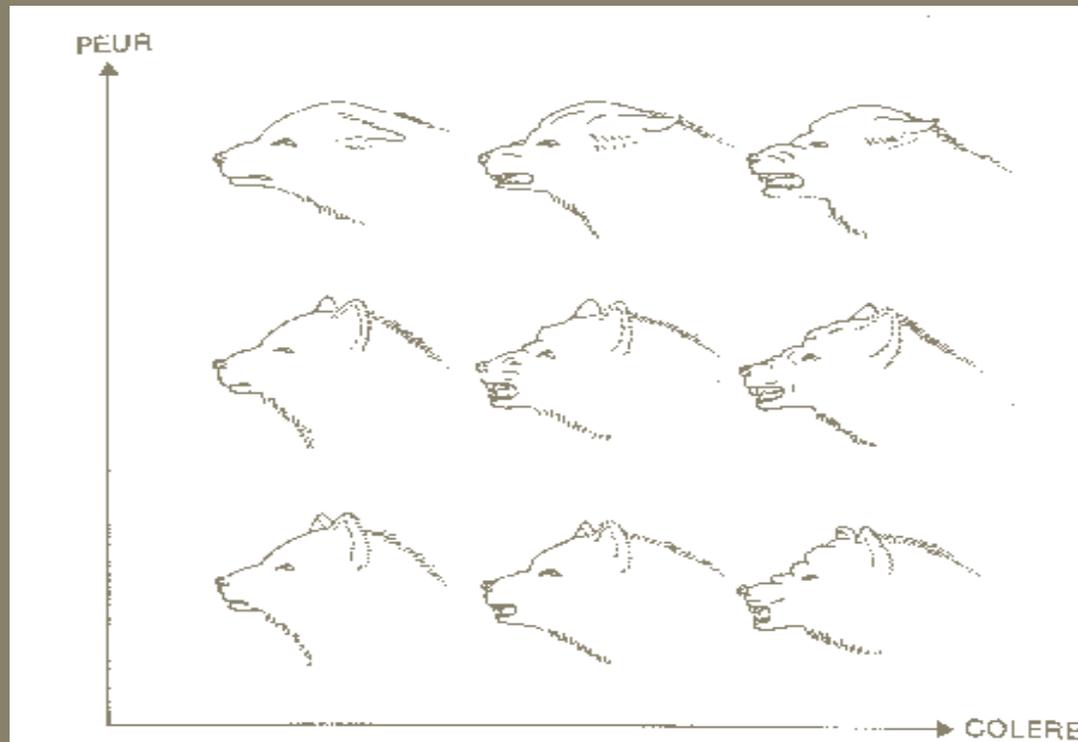
Exemplos de Catástrofes

E.C. Zeeman

- ◆ A curva representa a densidade de probabilidade do comportamento em presença dos fatores indicados de uma amostra suficientemente grande de cães.

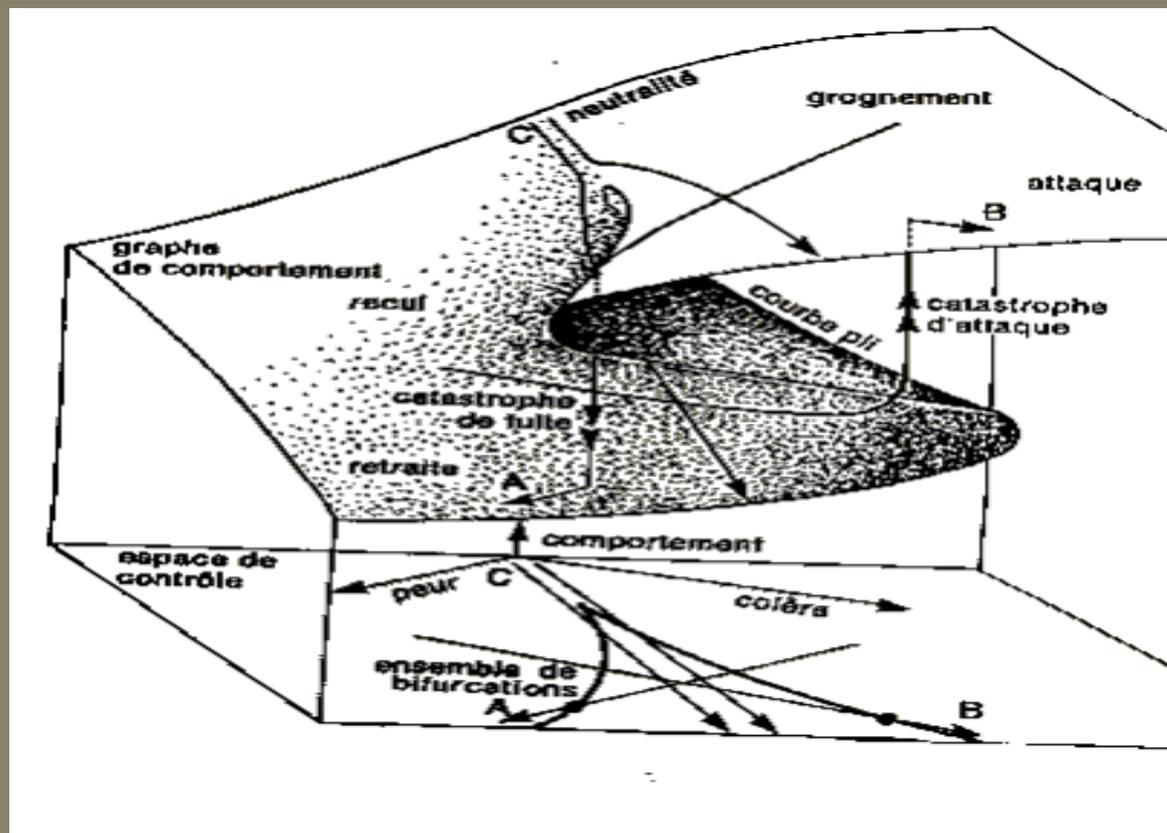
Exemplos de Catástrofes

E.C.Zeeman

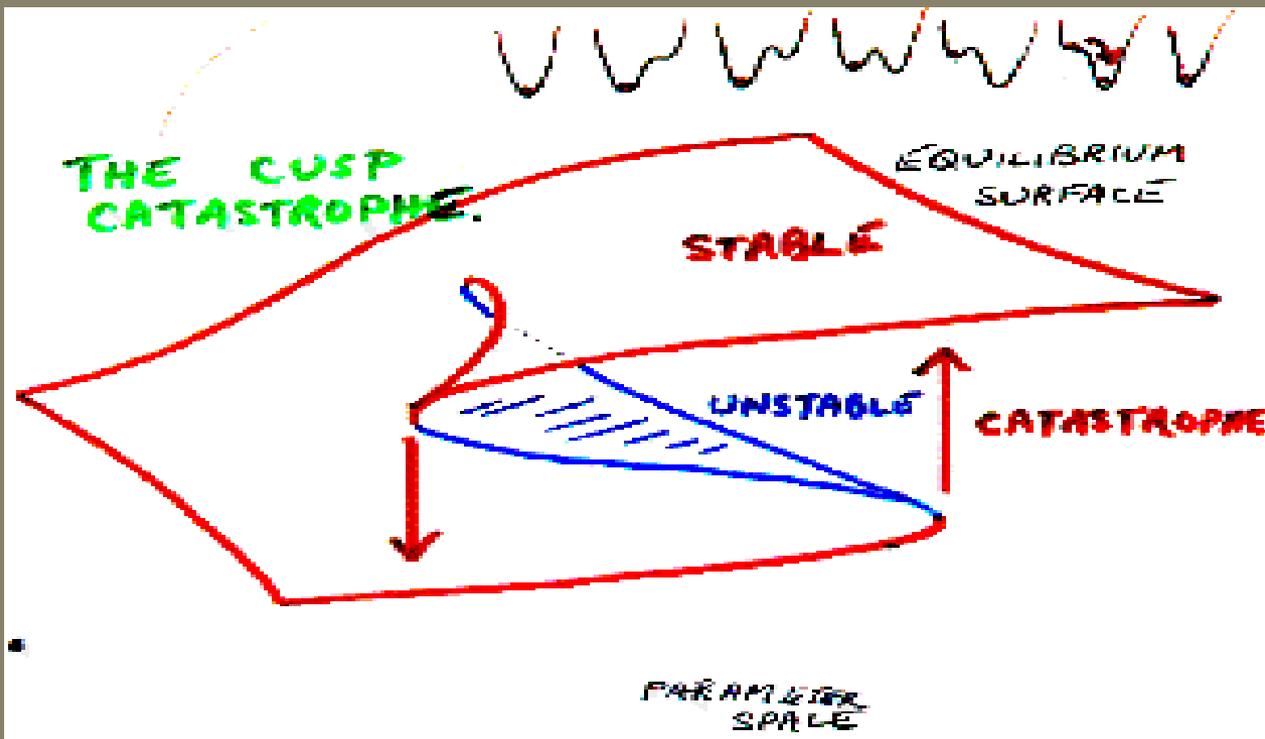


Exemplos de Catástrofes

E.C.Zeeman



Paulo Marcelo Dias Magalhães
UFOP



Exemplos de Catástrofes

E.C.Zeeman

- ◆ A figura mostra os estados mais prováveis do fenômeno. A parte hachurada indica os estados instáveis. No interior da cúspide existem dois possíveis estados, ataque e fuga, sendo a indiferença instável.

Modelos Formais x Modelos Contínuos

◆ Modelos formais (*kinematic* é um sistema formal)

vantagens: descrição simples (axiomática ou combinatorial), a dedução teoricamente pode ser mecanizada.

desvantagens: algumas questões podem ser “indecidíveis” dentro do sistema. Além disso, não é possível nenhuma dinâmica.

Modelos Formais x Modelos Contínuos

◆ Modelos contínuos (*kinematic* é um espaço topológico).

vantagens: admitem uma dinâmica, os modelos diferenciais são estritamente determinísticos e mesmo fenômenos qualitativamente indeterminados podem ser descritos por sistemas dinâmicos estruturalmente estáveis.

desvantagens: são difíceis de se obter, e caso seja necessário o emprego de equações diferenciais, somente uma classe pequena de equações podem ser tratadas.

Observações de René Thom

- ◆ *Um dos problemas centrais estudados pela espécie humana é o problema da dinâmica das formas. Qualquer que seja a definitiva natureza da realidade, é inquestionável que nosso universo não é um caos. Nós percebemos seres, objetos, coisas para as quais nós damos nomes. Esses seres ou coisas são formas ou estruturas equipadas com algum grau de estabilidade; eles ocupam alguma parte do espaço e duram algum período de tempo. Embora um dado objeto possa existir em diferentes formas, nós nunca falhamos em reconhecê-lo;*

Observações de René Thom

Este reconhecimento do mesmo objeto na infinita multiplicidade de suas manifestações é, por si mesmo, um problema (o clássico problema filosófico do conceito) que, me parece, os psicólogos da Gestalt tem posto em um referencial geométrico acessível a investigação científica... Nós precisamos reconhecer que o universo é criação, evolução e destruição sem cessar de formas e que o propósito da ciência é prever essa mudanças.

René Thom.

Vita de René Thom

- ◆ René Thom nasceu em 2 de setembro de 1923, em Montbéliard , França. Estudou na Ecole Normale Supérieure de Paris de 1943-46 e obteve seu Doutorado em Ciências Matemáticas em 1951. Passou um ano em Princeton, foi Professor na Faculdade de Ciências da Universidade de Strasbourg de 1954-63. A partir de 1963 se tornou Professor no I.H.E.S. Em 1954, inventou e desenvolveu a Teoria do Cobordismo em Topologia Algébrica dando origem a Teoria da Cohomologia. Por este trabalho, René Thom recebeu a Medalha Field em 1958.

René Thom



- ◆ René Thom faleceu em 25 de Outubro de 2002 na França.