

Transformada de Laplace

Característica principal: Algebrizador de EDO's lineares, ou seja, transforma uma EDO linear numa equação algébrica.

Método:

$$PVI : \begin{cases} L[y](t) = f(t) \\ I_{t_0}(y) = \vec{y}_0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}[y] = \frac{p(s)}{q(s)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

Vantagens: Existem duas razões principais para a utilização da transformada de Laplace \mathcal{L} ;

- (i) O método tradicional de resolução de um PVI envolvendo uma EDO não homogênea requer três etapas: 1) resolver a homogênea associada através da obtenção de um conjunto fundamental, 2) obter uma solução particular, 3) impor as condições iniciais. A transformada de Laplace resolve a EDO incorporando simultaneamente as condições iniciais.
- (ii) Resolve PVI's com forças externas $f(t)$ mais gerais que as impostas pelo método dos coeficientes indeterminados.
- (iii) Resolve equações integrais e integro-diferenciais.

Desvantagens:

- (i) Só se aplica a PVI's envolvendo EDO's lineares, principalmente à coeficientes constantes.
- (ii) No caso de EDO's não-homogêneas, a não-homogeneidade tem que satisfazer certas restrições.

Definição: Dada $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ defini-se a **transformada de Laplace** de f como sendo a função dada por

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt .$$

OBS: Uma notação alternativa é $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$. \square

OBS: Uma justificativa operacional para a estrutura da transformada de Laplace é dada pelo seguinte fato: para que um operador integral nuclear

$$T[f](s) = \int_0^{\infty} K(s,t) f(t) dt = F(s)$$

possua a propriedade de transformar uma EDO em uma equação algébrica envolvendo $F(s)$ e as condições iniciais, observamos que

$$\begin{aligned} T[f'](s) &= \int_0^{\infty} K(s,t) f'(t) dt = K(s,t) f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} K'(s,t) f(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} K(s,t) f(t) \Big|_0^T - \int_0^{\infty} K'(s,t) f(t) dt \\ &= K(s,0) f(0) - \int_0^{\infty} K'(s,t) f(t) dt \end{aligned}$$

Desde que se tenha $K(s,T)f(T) \rightarrow 0$, quando $T \rightarrow +\infty$ (essa é uma condição adicional que se deve impor). A equação algébrica mais simples envolvendo $F(s)$ seria da forma $p(s)F(s)$, com $p(s)$ um polinômio em s . Para que se tenha uma compatibilidade entre a ordem da EDO e o grau da equação algébrica correspondente, impõe-se que o grau de $p(s)$ seja 1. O polinômio do primeiro grau mais simples é $p(s) = as$, com $a \in \mathbb{R}$. Para tudo isso seja atendido, basta impor que se tenha

$$K'(s,t) = asK(s,t)$$

onde a derivada é em relação a variável t . Resolvendo obtém-se que

$$K(s,t) = Ce^{ast}$$

Como a transformada atua sobre funções definidas para $t \geq 0$ e se necessita do comportamento assintótico $K(s,T)f(T) \rightarrow 0$, quando $T \rightarrow +\infty$, então é necessário tomar $a < 0$, sendo mais simples tomarmos $a = -1$ (e $C = 1$), se quisermos que o domínio da função $F(s)$ contenha o semi-eixo positivo, ou seja,

$$K(s,t) = e^{-st} \quad \square$$

OBS: A integral imprópria acima é definida como sendo

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Quando para algum s o limite acima existe, diz-se que a integral converge nesse valor de s .

OBS: Quais devem ser as condições sobre f para que

$$\int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

seja convergente quando $T \rightarrow +\infty$ para ao menos alguns valores de s ?

Primeiramente, a função

$$e^{-st} f(t)$$

tem que ser integrável na variável t em qualquer intervalo $[0, T]$, $\forall T > 0$. Como e^{-st} é contínua $\forall t \in \mathbb{R}$, então basta que $f(t)$ seja integrável $\forall t > 0$, por exemplo seja contínua por partes em qualquer intervalo $[0, T]$, $\forall T > 0$. Já a questão da convergência quando $T \rightarrow +\infty$ é muito mais delicada e, na verdade, não se conhece uma condição necessária. Entretanto, uma condição suficiente é que f seja “dominada” por alguma exponencial de tal modo que se tenha o seguinte decaimento

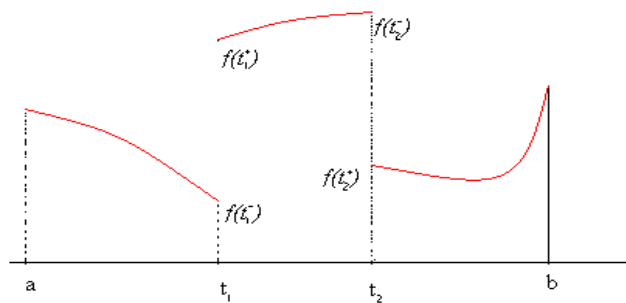
$$e^{-st} f(t) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty \quad \square$$

Definição: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é *contínua por partes* ou *seccionalmente contínua* em $[a, b]$ se:

(i) $f \in C([a, b] - \{t_1, \dots, t_n\})$ isto é f só não é contínua no conjunto finito $\{t_1, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$.

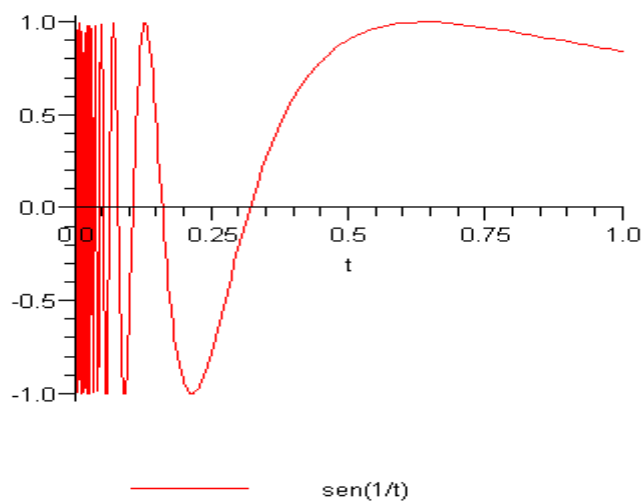
(ii) Existem os limites laterais nos pontos t_1, \dots, t_n , ou seja, as descontinuidades são apenas de salto, ou seja,

$$\exists f(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(t_k + \delta) \text{ e } \exists f(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(t_k - \delta).$$



Notação: $C_p([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua por partes em } [a, b]\}$.

Exemplo: $f(t) = 1/t$ e $f(t) = \text{sen}(1/t)$ não são contínuas por partes em nenhum intervalo contendo a origem.



Propriedades das funções contínuas por partes

P1) $f \in C_p([a, b]) \Rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt \right| < +\infty$.

P2) $f \equiv g$ em $[a, b]$ exceto nos pontos de descontinuidade $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt$.

P3) $f, g \in C_p([a, b]) \Rightarrow f \cdot g \in C_p([a, b])$.

P4) $f \in C([a, b]) \Rightarrow f \in C_p([a, b])$.

Definição: $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é de *ordem exponencial* em $]0, +\infty[$ se $\exists C, \alpha \in \mathbb{R}, C > 0$, tq:

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \forall t > 0.$$

Exemplo:

$f \equiv 1$ é de ordem exponencial em $]0, +\infty[$ com $C = 1, \alpha = 0$.

$f(t) = t^n$ é de ordem exponencial em $]0, +\infty[$ com $C = 1, \alpha > 0$.

$f(t) = e^{at}$ é de ordem exponencial em $]0, +\infty[$ com $C = 1, \alpha \geq a$.

$f(t) = \begin{cases} \text{sen}bt \\ \text{cos}bt \end{cases}$ é de ordem exponencial em $]0, +\infty[$ com $C = 1, \alpha = 0$.

$f(t) = \begin{cases} e^{at} \text{cos}bt \\ e^{at} \text{sen}bt \end{cases}$ é de ordem exponencial em $]0, +\infty[$ com $C = 1, \alpha \geq a$.

$f(t) = \begin{cases} t^n e^{at} \text{cos}bt \\ t^n e^{at} \text{sen}bt \end{cases}$ é de ordem exponencial em $]0, +\infty[$ com $C = 1, \alpha \geq a$.

Exemplo: $f(t) = e^{t^2}$ não é de ordem exponencial em $]0, +\infty[$, pois

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(t-\alpha)} = +\infty, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Definição: $\mathcal{E} = \{f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : f \text{ séc. contínua e de ordem exponencial em }]0, +\infty[\}$

Propriedade: \mathcal{E} é um espaço vetorial real.

Teorema 1: Se $f \in \mathcal{E}$ então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

converge $\forall s > \alpha$.

Prova: Utilizaremos o seguinte critério de comparação

Lema: Se f e g são integráveis em todo intervalo $[a, b]$, onde a é fixo, e se $|f(t)| \leq g(t), \forall t \geq a$, então

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge se } \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ converge.}$$

Como $f \in \mathcal{E}, \exists C, \alpha \in \mathbb{R}, C > 0$, tal que: $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \forall t > 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-st} (Ce^{\alpha t}) dt &= C \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = C \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-(s-\alpha)t} dt = C \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)} \right]_0^T \\ &= \frac{C}{(s-\alpha)} \lim_{T \rightarrow +\infty} (1 - e^{-(s-\alpha)T}) = \frac{C}{(s-\alpha)}, \text{ se } s > \alpha. \end{aligned}$$

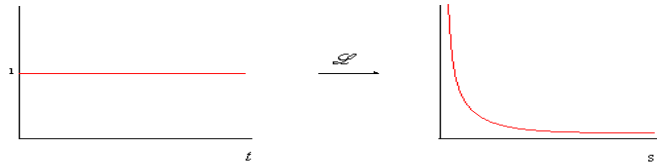
De modo que, pelo critério da comparação aplicado a $g(t) = Ce^{-(s-\alpha)t}$, obtém-se que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \text{ converge se } s > \alpha. \quad \Leftrightarrow$$

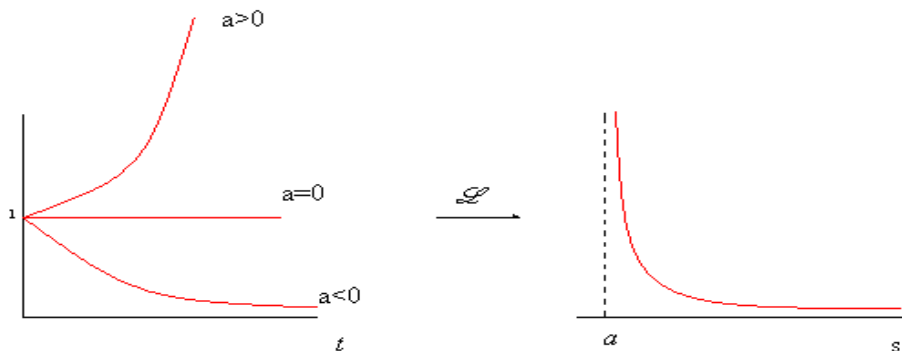
Conseqüência: O domínio da transformada de Laplace de uma função $f \in \mathcal{E}$ sempre contém um semi-eixo positivo $]\alpha, +\infty[$.

Exemplo: Cálculo de algumas transformadas

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} \right) = \frac{1}{s}, \forall s > 0.$$

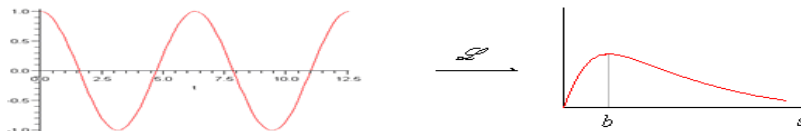


$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{(s-a)}, \forall s > a.$$



$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos bt](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos btdt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-st} \cos btdt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-st}}{s^2 + b^2} (-s \cos bt + b \sin bt) \right]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-sT}}{s^2 + b^2} (-s \cos bT + b \sin bT) + \frac{s}{s^2 + b^2} \right] = \frac{s}{s^2 + b^2} \end{aligned}$$

se só se $s > 0$.



Definição: Defini-se como *abscissa de convergência* de $\mathcal{L}[f]$ o número dado por

$$s_0 \triangleq \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : |\mathcal{L}[f](s)| < +\infty, \forall s > \alpha\}$$

Com isso quer-se dizer que

- (i) $s_0 \leq \alpha, \forall \alpha \in \Lambda$.
- (ii) Se $\exists \beta \in \mathbb{R} : \beta \leq \alpha, \forall \alpha \in \Lambda \Rightarrow \beta \leq s_0$.

Pode-se mostrar que $\mathcal{L}[f](s)$ não converge para $s \leq s_0$, de modo que

$$D(\mathcal{L}[f]) =]s_0, +\infty[.$$

OBS: Se $f(t) = e^{-t^2}$ ou $f(t) = 0$ então $s_0 = -\infty$.

Pergunta: Já sabemos que se $f \in \mathcal{E}$ então $\exists \mathcal{L}[f]$. Será que vale a recíproca? Se $\exists \mathcal{L}[f](s), \forall s > s_0$, então $f \in \mathcal{E}$? A resposta é não, pois, por exemplo, $f(t) = 1/\sqrt{t} \notin \mathcal{E}$, mas $|\mathcal{L}[f](s)| < +\infty, \forall s > 0$.

A Transformada de Laplace como Transformação Linear

Conforme vimos \mathcal{E} é um espaço vetorial onde sempre existe $\mathcal{L}[f]$. Portanto, é um bom domínio para \mathcal{L} . Agora, devemos achar um espaço vetorial real que sirva de contradomínio para \mathcal{L} .

Definição: $\mathbf{S} \triangleq \{F : I \rightarrow \mathbb{R} : I =]s_0, +\infty[\text{ ou } [s_0, +\infty[\text{ ou } s_0 \geq -\infty\}$.

Com a adição e multiplicação por escalar ponto a ponto, \mathbf{S} é um espaço vetorial real. Além disso,

$$\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{S}$$

Pergunta: $\mathcal{L}[f + g](s) = \mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s), \forall f, g \in \mathcal{E}$?

Resposta: Nem sempre, pois se $f(t) = \cos at$ e $g(t) = -\cos at$, então

$$\mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s) = \frac{s}{s^2 + a^2} + \left(-\frac{s}{s^2 + a^2}\right) = 0, \text{ em }]0, +\infty[.$$

Mas não está definida para $s \leq 0$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}[f + g](s) = \mathcal{L}[0](s) = 0 \text{ em }]-\infty, +\infty[\text{ ! ?}$$

Convenção: Identificaremos $F, G \in \mathbf{S}$ quando tivermos

$$F(s) = G(s) \text{ em algum semi-eixo positivo }]a, +\infty[.$$

Assim se obtém que

$$\mathcal{L}[\lambda f + g](s) = \lambda \mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s), \forall f, g \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pergunta: Núcleo (\mathcal{L}) = $\{\vec{0}_{\mathcal{E}}\}$? Ou seja, \mathcal{L} é injetiva e, portanto invertível sobre sua imagem?

Resposta: Não, pois conforme já sabemos pela propriedade P2, se $f, g \in \mathcal{E}$ só diferem em seus pontos de descontinuidade, então $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$, entretanto $f \neq g$.

Teorema 2: (Lerch)

Dadas $f, g \in \mathcal{E}$ tais que $\exists s_0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s), \forall s \in]s_0, +\infty[$$

Então, excetuando os possíveis pontos de descontinuidade, tem-se que

$$f(t) = g(t), \forall t \in]0, +\infty[$$

Conclusão: $\mathcal{L}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{S}$ é uma transformação linear que, se convencionarmos identificar funções em \mathcal{E} que coincidem nos pontos de continuidade, satisfaz

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) \in \mathbf{S} \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t) \in \mathcal{E}.$$

Definição: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t)$ é denominada *transformada inversa de Laplace* da função $F(s) \in \mathbf{S}$.

Pergunta: $\mathcal{L}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{S}$ é sobrejetiva, ou seja, $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \mathbf{S}$?

Resposta: Não! Isso por causa do seguinte resultado

Teorema 3: $f \in \mathcal{E} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$.

Prova: Pelo teorema 1,

$$|\mathcal{L}[f](s)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt \leq C \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{C}{s-\alpha}, \forall s > \alpha. \Rightarrow$$

Conclusão: Funções como $1, s, \text{sens } s, \cos s, \frac{s}{s+a}$, pertencem a \mathbf{S} , mas não possuem transformadas inversas em \mathcal{E} .

Teorema 4: Seja $f \in C([0, +\infty[)$ tal que $f' \in \mathcal{E}$. Então,

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+)$$

onde $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$. Generalizando, se $f, f', \dots, f^{(n-1)} \in C([0, +\infty[)$ e $f^{(n)} \in \mathcal{E}$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''](s) &= s^2 \mathcal{L}[f](s) - sf(0^+) - f'(0^+) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \vdots \\ \mathcal{L}[f^{(n)}](s) &= s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \end{aligned}$$

Prova: Apenas para o caso $n = 1$, os outros casos seguem por indução finita.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = \left(e^{-st} f(t) \right)_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= s\mathcal{L}[f](s) + \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ T \rightarrow +\infty}} \left(e^{-st} f(t) \right)_a^T \end{aligned}$$

Agora vamos usar o seguinte fato

Lema: Se $f \in C([0, +\infty[)$ com $f' \in \mathcal{E}$, então $f \in \mathcal{E}$.

Prova: Como $f' \in \mathcal{E}$ então $\exists C, \alpha \in \mathbb{R}, C > 0$ tal que $|f'(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \forall t > 0$, ou seja

$$-Ce^{\alpha t} \leq f'(t) \leq Ce^{\alpha t}$$

Integrando e desprezando as constantes de integração, obtém-se que

$$|f(t)| \leq \frac{C}{\alpha} e^{\alpha t}. \quad \square$$

De modo que,

$$e^{-sT} f(T) \rightarrow 0, \text{ qdo } T \rightarrow +\infty, \forall s > \alpha.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'](s) &= s\mathcal{L}[f](s) + \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} f(T) - \lim_{a \rightarrow 0^+} e^{-sa} f(a) \\ &= s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

Exemplo: $f(t) = -\frac{1}{a} \cos at \Rightarrow f'(t) = \sin at$.

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin at](s) &= s\mathcal{L}\left[-\frac{1}{a} \cos at\right](s) - f(0^+) \\ &= -\frac{s}{a} \mathcal{L}[\cos at](s) - \left(-\frac{1}{a}\right) \\ &= -\frac{s}{a} \left(\frac{s}{s^2 + a^2}\right) + \frac{1}{a} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \forall s > 0. \end{aligned}$$

Exemplo: $\frac{d^n}{dt^n} t^n = n! \Rightarrow \mathcal{L}[D^n t^n](s) = \mathcal{L}[n!](s) = n! \mathcal{L}[1](s) = \frac{n!}{s}, \forall s > 0.$

Por outro lado,

$$\mathcal{L}[D^n t^n](s) = s^n \mathcal{L}[t^n](s) - s^{n-1} \cdot 0^n - s^{n-2} (n0^{n-1}) - \dots - n(n-1)\dots(n-(n-2)) \cdot 0 = s^n \mathcal{L}[t^n](s)$$

Logo, $\frac{n!}{s} = s^n \mathcal{L}[t^n](s) \Rightarrow \mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \forall s > 0.$

OBS: Da última igualdade se obtém que $n! = s^{n+1} \mathcal{L}[t^n](s) = s^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt, \forall s > 0$, em particular para $s = 1$, obtemos a generalização do fatorial de um número natural para qualquer número real que não seja um inteiro negativo, dado pela função especial **função Gama de Euler**

$$\Gamma(x+1) = x! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \quad \square$$

Aplicação da Transformada de Laplace a um PVI

Caso Particular:

$$PVI : \begin{cases} y'' - y = 1 \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}[y'' - y](s) = \mathcal{L}[1](s) \Rightarrow s^2 \mathcal{L}[y](s) - 1 - \mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s}$$

ou seja,

$$(s^2 - 1) \mathcal{L}[y](s) = \frac{1+s}{s} \Rightarrow \mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} = \mathcal{L}[e^t](s) - \mathcal{L}[1](s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = e^t - 1, \forall t \geq 0.$$

Que é, exatamente, a única solução do PVI.

Caso Geral: Dados $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{E}, \vec{y}_0 = (y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0))^T \in \mathbb{R}^n$, seja o

$$PVI : \begin{cases} L[y](t) = a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \\ I_0 y = \vec{y}_0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t)\right](s) = \mathcal{L}[f](s)$$

Usando as propriedades de \mathcal{L} , obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \mathcal{L}[y^{(k)}](s) &= \mathcal{L}[f](s) \Rightarrow a_0 \mathcal{L}[y](s) + \sum_{k=1}^n a_k [s^k \mathcal{L}[y](s) - s^{k-1} y(0^+) - s^{k-2} y'(0^+) - \dots \\ &\dots - y^{(k-1)}(0^+)] = \mathcal{L}[f](s) \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k s^k \mathcal{L}[y](s) - \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} a_i s^{(k-1)-i} y^{(i)}(0^+) = \mathcal{L}[f](s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{L}[y](s) &= \frac{\mathcal{L}[f](s) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} a_i s^{(k-1)-i} y^{(i)}(0^+)}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mathcal{L}[f](s) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} a_i s^{(k-1)-i} y^{(i)}(0^+)}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mathcal{L}[f](s) + q(s)}{p_L(s)} \right](t) \end{aligned}$$

Teorema 5: Se $f \in \mathcal{E}$ e $a \geq 0$, então

$$\mathcal{L}\left[\int_a^t f(x)dx\right](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s) - \frac{1}{s} \int_0^a f(x)dx$$

De um modo geral

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int_a^t \dots \int_a^t f(x)dx \dots dx}_n\right](s) = \frac{1}{s^n} \mathcal{L}[f](s) - \frac{1}{s^n} \int_0^a f(x)dx - \frac{1}{s^{n-1}} \int_0^a \int_a^t f(x)dx dx - \dots - \frac{1}{s} \int_0^a \underbrace{\int_a^t \dots \int_a^t f(x)dx \dots dx}_{n-1}$$

Prova:

A prova se baseia no fato de que se $f \in \mathcal{E}$ então $\int_a^t f(x)dx \in \mathcal{E}$. De modo que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_a^t f(x)dx\right](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_a^t f(x)dx\right) dt = \int_0^\infty \left(\int_a^t f(x)dx\right) d\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) = \\ &= \left(\frac{e^{-st}}{-s} \int_a^t f(x)dx\right) \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{s} \int_a^0 f(x)dx + \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s) \end{aligned}$$

A fórmula geral é provada iterando esse resultado. \Rightarrow

Exemplo: Como se sabe $\int_0^t \cos ax dx = \left(\frac{\text{sen}ax}{a}\right) \Big|_0^t = \frac{\text{sen}at}{a}$. Então,

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{a} \text{sen}at\right](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[\cos at](s) \Rightarrow \mathcal{L}[\text{sen}at](s) = \frac{a}{s} \left(\frac{s}{s^2 + a^2}\right) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \forall s > 0.$$

Exemplo: $\mathcal{L}[te^t](s) = ?$ Tem-se que

$$\int_0^t xe^x dx = \int_0^t x de^x = \left(xe^x\right) \Big|_0^t - \int_0^t e^x dx = te^t - e^t + 1.$$

De modo que,

$$\mathcal{L}[te^t - e^t + 1](s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t xe^x dx\right](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[te^t](s).$$

Mas então

$$\left(1 - \frac{1}{s}\right) \mathcal{L}[te^t](s) = \mathcal{L}[e^t](s) - \mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s-1)}.$$

O que resulta em

$$\mathcal{L}[te^t](s) = \frac{1}{(s-1)^2}, \forall s > 1.$$

OBS: $\mathcal{L}[te^t](s) = \frac{1}{(s-1)^2} = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s-1} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[e^t](s)$. Coincidência?

1º Teorema da Translação:

$$\mathcal{L}[f](s) = \varphi(s) \Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{1}{b} e^{\frac{a}{b}t} f\left(\frac{t}{b}\right)\right](s) = \varphi(bs - a), \forall b > 0, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Prova:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{b} e^{\frac{a}{b}t} f\left(\frac{t}{b}\right)\right](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\frac{1}{b} e^{\frac{a}{b}t} f\left(\frac{t}{b}\right)\right) dt = \int_0^{\infty} e^{-(bs-a)\tau} f(\tau) d\tau = \mathcal{L}[f](bs - a) = \varphi(bs - a)$$

↔

Corolário: $\mathcal{L}^{-1}[\varphi(bs - a)](t) = \frac{1}{b} e^{\frac{a}{b}t} f\left(\frac{t}{b}\right) = e^{\frac{a}{b}t} \mathcal{L}^{-1}[\varphi(bs)](t), \forall b > 0, \forall a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}^{-1}[\varphi(bs)](t) = e^{-\frac{a}{b}t} \mathcal{L}^{-1}[\varphi(bs - a)](t), \forall a \in \mathbb{R}.$$

Exemplo: Tem-se que

$$\mathcal{L}[\cos bt](s) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

De modo que,

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos bt](s) = \frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo: Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s + 3}{s^2 - 4s + 20}\right](t)$.

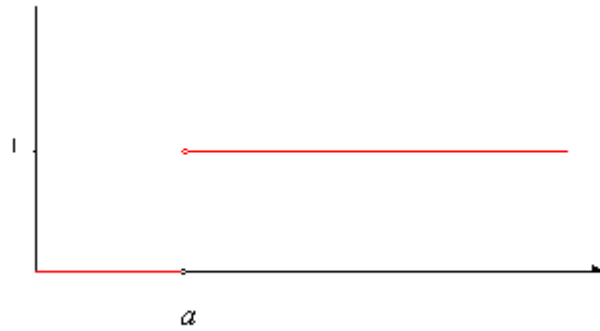
$$\frac{2s + 3}{s^2 - 4s + 20} = \frac{2s + 3}{(s^2 - 4s + 4) + 16} = \frac{2(s - 2) + 7}{(s - 2)^2 + 4^2} = 2 \frac{(s - 2)}{(s - 2)^2 + 4^2} + \frac{7}{4} \frac{4}{(s - 2)^2 + 4^2}$$

De modo que,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s + 3}{s^2 - 4s + 20}\right](t) = 2e^{2t} \cos 4t + \frac{7}{4} e^{2t} \text{sen} 4t.$$

Definição: A *função degrau unitário* ou *função de Heaviside* é a seguinte função:

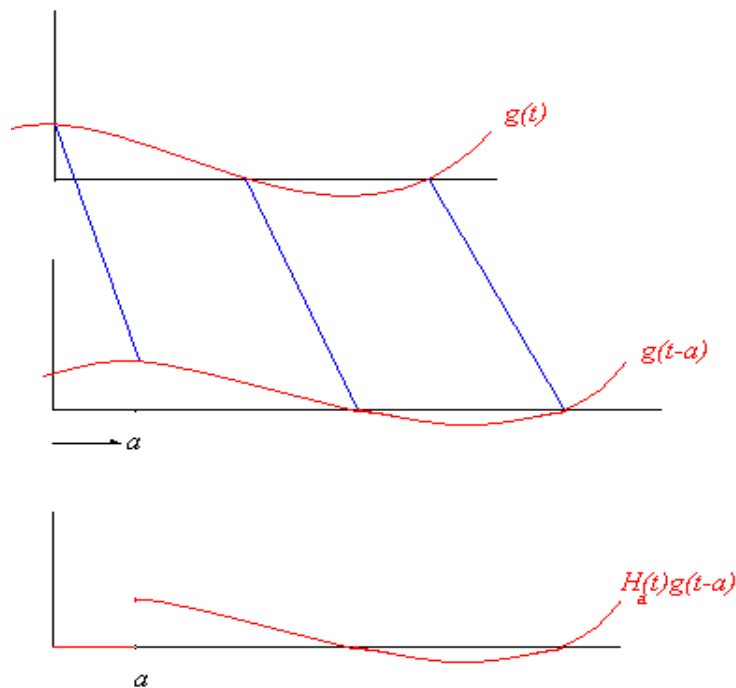
$$H_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases} \quad (a \geq 0)$$



Aplicação:

Dada uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode-se construir a seguinte função

$$H_a(t)g(t-a), \forall a \in \mathbb{R}.$$



A interpretação física de tais funções é de que elas representam **impulsos com retardamento** em sistemas físicos, pois só passam a atuar no sistema após $t = a$.

2º Teorema da Translação:

$$\text{Se } f(t) = H_a(t)g(t-a) \in E, \text{ então } \mathcal{L}[f](s) = e^{-as} \mathcal{L}[g](s), \forall a > 0.$$

Prova:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} H_a(t)g(t-a)dt = \int_a^{\infty} e^{-st} g(t-a)dt = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+a)} g(\tau)d\tau = e^{-as} \mathcal{L}[g](s)$$

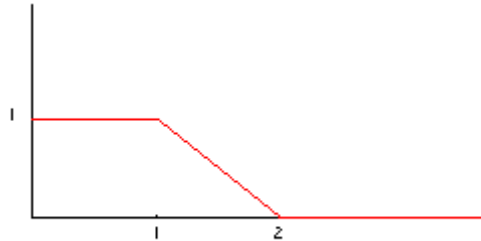
Corolário:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as} \mathcal{L}[g](s)](t) = H_a(t)g(t-a), \forall a > 0.$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[H_a(t)\text{sent}](s) &= \mathcal{L}[H_a(t)\text{sen}(t+a-a)](s) = e^{-as} \mathcal{L}[\text{sen}(t+a)](s) \\
&= e^{-as} \mathcal{L}[\text{sent} \cos a + \text{sena} \cos t](s) \\
&= e^{-as} [\cos a \mathcal{L}[\text{sent}](s) + \text{sena} \mathcal{L}[\cos t](s)] \\
&= e^{-as} \left[\cos a \frac{1}{s^2+1} + \text{sena} \frac{s}{s^2+1} \right] = e^{-as} \left(\frac{\cos a + s \sin a}{s^2+1} \right)
\end{aligned}$$

Exemplo: Seja f uma função que possui o seguinte gráfico



Podemos calcular $\mathcal{L}[f]$ utilizando os teoremas acima. Basta observar que

$$\begin{aligned}
f &= f_1 + f_2 + f_3 \\
f_1 &\equiv 1, \quad f_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1-t, & t > 1 \end{cases}, \quad f_3(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 2 \\ t-2, & t > 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Assim tem-se que

$$f_2(t) = H_1(t)(-t+1), \quad f_3(t) = H_2(t)(t-2).$$

De modo que,

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[1](s) + e^{-s} \mathcal{L}[-t](s) + e^{-2s} \mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{s - e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}.$$

Exemplo: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s^2+6s+10}\right](t) = ?$

Vamos usar o corolário: $\mathcal{L}^{-1}[e^{-as} \mathcal{L}[g](s)](t) = H_a(t)g(t-a), \forall a > 0$.

Neste caso, temos que necessariamente $a = 3$. De modo que,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s^2+6s+10}\right](t) = H_3(t)g(t-3) \quad \text{onde} \quad \mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{s^2+6s+10}.$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{s^2+6s+10} = \frac{1}{(s+3)^2+1} \Rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2+1}\right](t) = e^{-3t} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t) = e^{-3t} \text{sent}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s^2+6s+10}\right](t) = H_3(t)e^{-3(t-3)} \text{sen}(t-3).$$

Teorema 6: $\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f](s).$

Prova: $n=1$:

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f](s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} (e^{-st} f(t)) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt = -\mathcal{L}[tf(t)](s).$$

$n > 1$: indução sobre n . ↔

Corolário: $\mathcal{L}[f](s) = \varphi(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d^n}{ds^n} \varphi(s)\right](t) = (-1)^n t^n \mathcal{L}^{-1}[\varphi](t).$

Exemplo: $\mathcal{L}[t \operatorname{sent}](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\operatorname{sent}](s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}.$

Exemplo: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2}\right](t) = ?$

Vamos usar a propriedade $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s)$. Neste caso, obtém-se que

$$\int_0^t \mathcal{L}^{-1}[\varphi(s)](t) dt = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \varphi(s)\right](t).$$

De modo que,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \frac{s}{(s^2 + 1)^2}\right](t) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1}\right)\right](t) dt$$

Por outro lado,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1}\right)\right](t) = -t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right](t) = -t \operatorname{sent}$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2}\right](t) = -\frac{1}{2} \int_0^t (-x \operatorname{sen} x) dx = \frac{1}{2} \int_0^t x d(-\cos x) = \frac{1}{2} \operatorname{sent} - \frac{1}{2} t \cos t.$$

O próximo resultado é muito importante na análise de sinais periódicos, os quais são muito frequentes na eletrônica.

Teorema 7: Se $f \in \mathcal{E}$ é periódica de período T , então

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}.$$

Prova:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t) dt + \dots + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t) dt + \dots$$

Fazendo a mudança $t = x + nT$ na $(n+1)$ -ésima integral obtém-se que

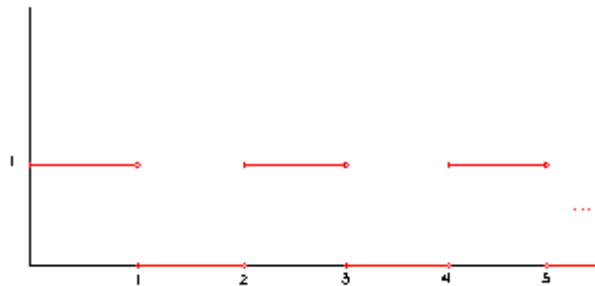
$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-sx} e^{-snT} f(x + nT) dx = e^{-snT} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx$$

De modo que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx + \dots + e^{-snT} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx + \dots \\ &= (1 + e^{-sT} + \dots + e^{-snT} + \dots) \int_0^T e^{-sx} f(x) dx = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx \end{aligned}$$

Uma vez que $0 < e^{-sT} < 1, \forall s > 0$. \Rightarrow

Exemplo: Obtenha a transformada de Laplace do seguinte sinal



Tem-se que

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ f(t+2) = f(t) \end{cases}$$

De modo que,

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\int_0^2 e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{\int_0^1 e^{-st} dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})} = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}$$

Exemplo: Obter

$$\mathcal{L}[\text{sen}(t)](s)$$

Tem-se que

$$T = 2\pi \Rightarrow \mathcal{L}[\text{sen}(t)](s) = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-st} \text{sen } t dt}{1 - e^{-2\pi s}} = \frac{\frac{e^{-st}}{s^2 + 1} (-s \text{sen } t - \text{cos } t) \Big|_0^{2\pi}}{1 - e^{-2\pi s}} = \frac{-e^{-2\pi s} + 1}{(s^2 + 1)(1 - e^{-2\pi s})} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Aplicações as EDO's a Coeficientes Polinomiais:

A segunda função especial que nós obteremos será a *função de Bessel de 1ª espécie e ordem zero*, $J_0(t)$, dada pela solução do seguinte

$$PVI: \begin{cases} ty'' + y' + ty = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando Laplace à EDO obtemos

$$-\frac{d}{ds}[s^2 \mathcal{L}[y](s) - sy(0^+) - y'(0^+)] + (s \mathcal{L}[y](s) - y(0^+)) - \frac{d}{ds} \mathcal{L}[y](s) = 0$$

Ou seja

$$-\frac{d}{ds}[s^2 \mathcal{L}[y](s) - s] + s \mathcal{L}[y](s) - 1 - \frac{d}{ds} \mathcal{L}[y](s) = 0$$

Ou seja

$$(s^2 + 1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}[y](s) + s \mathcal{L}[y](s) = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} \mathcal{L}[y](s) + \frac{s}{s^2 + 1} \mathcal{L}[y](s) = 0$$

A qual é uma EDO linear de 1ª ordem com fator integrante

$$\mu(s) = e^{\int \frac{s}{s^2+1} ds} = e^{\ln(s^2+1)^{1/2}} = (s^2 + 1)^{1/2}.$$

De modo que,

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{C}{s} \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-1/2} = \frac{C}{s} \left(1 - \frac{1}{2s^2} + \frac{3}{2^2 2!} \frac{1}{s^4} - \dots + (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{1}{s^{2n}} + \dots\right)$$

OBS: Por Taylor obtém-se que

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, então

$$\mathcal{L}[y](s) = C \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{1}{s^{2k+1}}$$

Procedendo formalmente e aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos

$$y(t) = C \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(2^k k!)^2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{2k+1}}\right](t) = C \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = C \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2^k k!)^2} t^{2k}$$

Agora, impondo a condição inicial $y(0) = 1$, conclui-se que

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2^k k!)^2} t^{2k}$$

Generalização: A *equação de Bessel de 1ª espécie e de ordem n* é dada por

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0.$$

Possui como uma das soluções a *função de Bessel de 1ª espécie e ordem n* dada por

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}, t > 0.$$

Aplicação a PVI com condições iniciais em $t_0 \neq 0$

Consideremos o seguinte

$$PVI: \begin{cases} y'' + y = 1 \\ y(\pi) = a, y'(\pi) = b \end{cases}$$

Fazendo a mudança $x = t - \pi$ obtemos que $\tilde{y}(x) = y(x + \pi) = y(t)$ satisfaz as seguintes condições

$$\tilde{y}(0) = y(\pi), \tilde{y}'(0) = y'(\pi), \tilde{y}''(x) = y''(t)$$

De modo que, o PVI original se transforma no seguinte

$$PVI: \begin{cases} \tilde{y}'' + \tilde{y} = 1 \\ \tilde{y}(0) = a, \tilde{y}'(0) = b \end{cases}$$

Esse nós podemos aplicar Laplace para obter

$$\mathcal{L}[\tilde{y}''(x)](s) + \mathcal{L}[\tilde{y}(x)](s) = \mathcal{L}[1](s) \Rightarrow [s^2 \mathcal{L}[\tilde{y}](s) - s\tilde{y}(0) - \tilde{y}'(0)] + \mathcal{L}[\tilde{y}](s) = \frac{1}{s}$$

ou seja

$$(s^2 + 1)\mathcal{L}[\tilde{y}](s) = \frac{1}{s} + as + b \Rightarrow \mathcal{L}[\tilde{y}](s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} + \frac{as + b}{(s^2 + 1)}$$

De modo que,

$$\tilde{y}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 + 1)}\right](x) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{as + b}{(s^2 + 1)}\right](x)$$

Agora,

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 - \cos x, \quad \frac{as + b}{s^2 + 1} = a \frac{s}{s^2 + 1} + b \frac{1}{s^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} a \cos x + b \operatorname{sen} x$$

De modo que,

$$\tilde{y}(x) = 1 + (a - 1) \cos x + b \operatorname{sen} x$$

Retornando a variável inicial, obtem-se que a solução do PVI original é dada por

$$y(t) = 1 + (a - 1) \cos(t - \pi) + b \operatorname{sen}(t - \pi).$$

Função Impulso Unitário (Delta de Dirac)

As forças impulsivas aparecem geralmente como “forças externas” em EDO’s do tipo

$$ay'' + by' + cy = g_\varepsilon(t)$$

onde $\varepsilon > 0$ e $g_\varepsilon(t)$ é zero exceto num intervalo $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$, no qual é “muito grande”, ou seja $g_\varepsilon(t)$ é uma **força concentrada em** t_0 .

Definição: A integral imprópria

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(t) dt$$

é o **impulso total** aplicado pela força impulsiva $g_\varepsilon(t)$.

Exemplo: Consideremos a seguinte força impulsiva

$$d_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 0, & t < -\varepsilon \vee t > \varepsilon \end{cases}$$

Neste caso o impulso total é dado por

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} d_\varepsilon(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = 1, \forall \varepsilon > 0.$$

Concentração da força impulsiva d_ε : é quando se faz $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Tem-se que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} d_\varepsilon(t) = +\infty$$

Por outro lado,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I(\varepsilon) = 1$$

De modo que, no limite se obtém um “objeto matemático” surpreendente!

$$d_0(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \text{ satisfazendo } \int_{-\infty}^{+\infty} d_0(t)dt = 1 \text{ !?}$$

Esse novo objeto impôs uma generalização do conceito usual de função.

Definição: A “função” *delta de Dirac* ou *função impulso unitário*, δ , é caracterizada pelas seguintes propriedades

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$$

OBS: Não existe função do Cálculo Elementar satisfazendo tais propriedades. O δ é o primeiro exemplo de uma *função generalizada* ou *distribuição*. □

Definição: O impulso unitário em $t_0 \neq 0$ é dado por

$$\delta(t - t_0)$$

e denotado por δ_{t_0} . De modo que,

$$\delta_{t_0}(t) = \begin{cases} +\infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \text{ com } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_0}(t)dt = 1.$$

Apesar de δ_{t_0} não ser uma função, pode-se obter a transformada de Laplace de δ_{t_0} através de um processo limite. Denota-se δ por δ_0 .

Definição: $\mathcal{L}[\delta_{t_0}](s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{L}[d_\varepsilon(t - t_0)](s), \forall t_0 > 0.$

De modo que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta_{t_0}](s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-st} d_\varepsilon(t - t_0)dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} e^{-st} \frac{1}{2\varepsilon} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right) \Big|_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon s} \left(-e^{-s(t_0 + \varepsilon)} + e^{-s(t_0 - \varepsilon)} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{-st_0} \frac{\text{senhs}\varepsilon}{s\varepsilon} \end{aligned}$$

Aplicando L’hospital, obtem-se que

$$\mathcal{L}[\delta_{t_0}](s) = e^{-st_0}, \forall t_0 > 0, \forall s \neq 0.$$

OBS: Surpreendentemente,

$$\mathcal{L}[\delta_{t_0}] \in \mathcal{S}, \text{ mas } \delta_{t_0} \notin \mathcal{E} \text{ !} \square$$

OBS: Passando o limite $t_0 \rightarrow 0^+$, obtem-se que

$$\mathcal{L}[\delta_0](s) = 1. \square$$

Definição:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_0}(t) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} d_\varepsilon(t-t_0) f(t) dt, \forall f \in C^0(\mathbb{R}).$$

Utilizando o TVM para integrais, obtem-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d_\varepsilon(t-t_0) f(t) dt = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t) dt = \frac{1}{2\varepsilon} (2\varepsilon) f(t^*) = f(t^*)$$

para algum $t^* \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$. Logo, $t^* \rightarrow t_0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, de modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_0}(t) f(t) dt = f(t_0), \forall f \in C^0(\mathbb{R}).$$

Exemplo: Resolva o seguinte

$$PVI: \begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta_\pi(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando \mathcal{L} obtemos que

$$s^2 \mathcal{L}[y](s) - sy(0^+) - y'(0^+) + 2(s\mathcal{L}[y](s) - y(0^+)) + 2\mathcal{L}[y](s) = e^{-s\pi}$$

ou seja

$$(s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}[y](s) = e^{-s\pi} \Rightarrow \mathcal{L}[y](s) = \frac{e^{-s\pi}}{s^2 + 2s + 2}$$

Aplicando \mathcal{L}^{-1}

$$\begin{aligned} y(t) &= e^\pi \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi(s+1)}}{(s+1)^2 + 1}\right](t) = e^\pi e^{-t} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}\right](t) = e^{-(t-\pi)} H_\pi(t) \text{sen}(t-\pi) = \\ &= -e^{-(t-\pi)} H_\pi(t) \text{sent} \end{aligned}$$

Convolução:

Pergunta: $\mathcal{L}[f \cdot g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$?

Resposta: Não!

Contra-Exemplo:

$$f \equiv 1, g(t) = t \Rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s}, \mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{s^3}.$$

$$\text{Entretanto, } \mathcal{L}[fg](s) = \mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s^2}.$$

Por outro lado, pela 2ª propriedade da translação, tem-se que

$$e^{-\tau s} \mathcal{L}[g](s) = \mathcal{L}[H_\tau(t)g(t-\tau)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t-\tau) dt, \forall \tau > 0.$$

OBS: De fato,

$$\begin{aligned}
e^{-\tau s} \mathcal{L}[g](s) &= \mathcal{L}[H_\tau(t)g(t-\tau)](s) = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-st} g(t-\tau) dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-s(\theta+\tau)} g(\theta) d\theta \quad , (\theta = t - \tau)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[g(t-\tau)](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t-\tau) dt = \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-s(\theta+\tau)} g(\theta) d\theta \\
&= \left(\int_{-\tau}^0 + \int_0^{+\infty} \right) e^{-s(\theta+\tau)} g(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

Como $g \in \mathcal{E}$, então $D(g) =]0, +\infty[\Rightarrow g \equiv 0, \forall \theta \in [-\tau, 0], \forall \tau > 0$. De modo que,

$$\mathcal{L}[g(t-\tau)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-s(\theta+\tau)} g(\theta) d\theta = e^{-\tau s} \mathcal{L}[g](s), \forall \tau > 0. \quad \square$$

Portanto, se $f, g \in \mathcal{E}$ possuem transformadas definidas em $]\alpha, +\infty[$, então

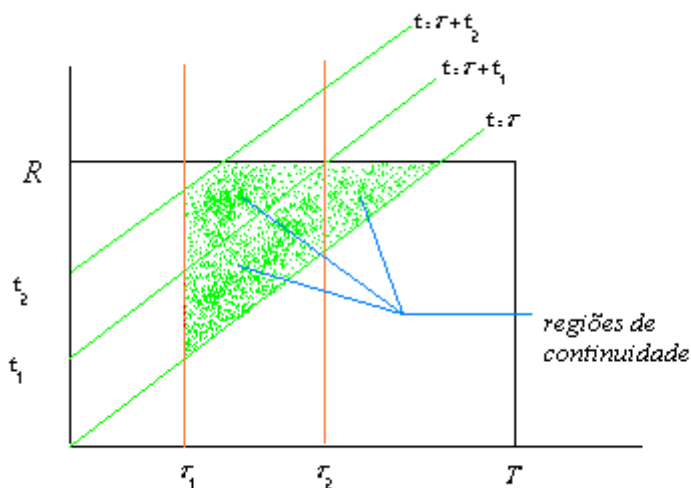
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-st} g(t) dt \right) \\
&= \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} \left(\int_0^{+\infty} e^{-st} g(t) dt \right) d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} \mathcal{L}[g](s) d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} f(\tau) \mathcal{L}[g(t-\tau)](s) d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} f(\tau) \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t-\tau) dt d\tau = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-st} g(t-\tau) dt d\tau
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-st} g(t-\tau) dt d\tau < +\infty \quad (1)$$

Uma vez que, $\mathcal{L}[f](s), \mathcal{L}[g](s) < +\infty, \forall s > \alpha$.

OBS: Fixados $T > 0, R > 0$, tem-se que o integrando em (1) é contínuo em sub-regiões contidas no retângulo $\mathcal{R} : 0 \leq \tau \leq T, 0 \leq t \leq R$. Uma vez que, se os saltos de f em $[0, T]$ ocorrem nos pontos $\tau_k, (k = 1, \dots, m)$ e os saltos de g em $[0, R]$ ocorrem nos pontos $t_i, (i = 1, \dots, n)$, então os saltos do integrando ocorrem nas retas; $\tau = \tau_k, t = \tau + t_i$.



Teorema: Teste M de Weierstrass para convergência uniforme de integrais do tipo

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt, 0 \leq x \leq c.$$

Hipótese:

(H1) $f(x, t)$ contínua em regiões poligonais (n° finito) contidas em retângulos:

$$0 \leq x \leq c, 0 \leq t \leq T.$$

(H2) Existe uma função seccionalmente contínua $M(t)$ satisfazendo

$$|f(x, t)| \leq M(t), 0 \leq x \leq c, \forall t > 0$$

e

$$\int_0^{+\infty} M(t) dt < +\infty.$$

Tese: A integral $F(x)$ é uniformemente convergente em relação ao parâmetro $x \in [0, c]$.

OBS: Para podermos inverter a ordem de integração em (1) é necessário estabelecer a convergência uniforme da integral imprópria em (1) em relação ao parâmetro $\tau \in [0, T]$. □

Entretanto, devido à $f, g \in \mathcal{E}$, existe $C > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(\tau)e^{-s\tau}g(t-\tau)| \leq Ce^{-s\tau}e^{-st}e^{\alpha(t-\tau)} = Ce^{(\alpha-s)t} := M(t) \quad (2)$$

onde $M(t)$ satisfaz ao teste M de Weierstrass, pois independe do parâmetro τ e

$$\int_0^{+\infty} M(t) dt < +\infty, \forall s > \alpha.$$

De modo que, (1) pode ser reescrito como

$$\mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^T f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} [I_1(T) + I_2(T)]$$

onde

$$I_1(T) = \int_0^T e^{-st} \int_0^T f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt$$

$$I_2(T) = \int_T^{+\infty} e^{-st} \int_0^T f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt$$

De (2), obtem-se que

$$|I_2(T)| \leq C \int_T^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} \int_0^T d\tau dt = C \frac{e^{-(s-\alpha)T} T}{(s-\alpha)}, \forall s > \alpha.$$

De modo que,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} I_2(T) = 0.$$

Por outro lado, a região de integração de $I_1(T)$ é o quadrado: $0 \leq \tau \leq T, 0 \leq t \leq T$, sendo que $g(t-\tau)$ não está definida para $\tau > t$ podendo, portanto, ser definida igual a zero nessa região. Com isso, obtém-se que

$$I_1(T) = \int_0^T e^{-st} \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt.$$

De modo que,

$$\mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s) = \lim_{T \rightarrow +\infty} I_1(T) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt.$$

Definição: A *convolução* de duas funções f e g , denotada por $f * g$, é dada pela seguinte função

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Teorema:

Hipóteses: $f, g \in \mathcal{E}$ com $\mathcal{L}[f](s), \mathcal{L}[g](s)$ definidas em $0 \leq \alpha < s < +\infty$.

Tese:

$$\mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s) = \mathcal{L}[f * g](s)$$

$\forall s > \alpha$.

Corolário:

$$(f * g)(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)](t).$$

Propriedades:

(P1) $f * g = g * f$

(P2) $f * (g + h) = f * g + f * h$

(P3) $f * (g * h) = (f * g) * h$

(P4) $f * 0 = 0$

(P5) $\tilde{f} * \delta_0 = \tilde{f}$, $\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t < +\infty \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

OBS: $\tilde{f} \in C(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f \in C(\overline{\mathbb{R}^+})$ e $f(0) = 0$. □

Pergunta: $f, g \in \mathcal{E} \Rightarrow f * g \in \mathcal{E}$?

Resposta: Sim!

De fato, $f, g \in \mathcal{E} \Rightarrow \exists C_f, C_g > 0, \exists \alpha_f, \alpha_g \in \mathbb{R}: |f(t)| \leq C_f e^{\alpha_f t}, |g(t)| \leq C_g e^{\alpha_g t}, \forall t > 0$

De modo que,

$$|f(\tau)g(t-\tau)| \leq C e^{\alpha_f \tau + \alpha_g (t-\tau)} \leq C e^{\alpha t}, \text{ onde } C = C_f C_g, \alpha = \max\{\alpha_f, \alpha_g\}. \text{ Logo,}$$

$$|(f * g)(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)g(t-\tau)| d\tau \leq C \int_0^t e^{\alpha \tau} d\tau = C t e^{\alpha t}, \forall t > 0.$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, definindo

$$M(\varepsilon) = \max_{0 \leq t < \infty} te^{-\varepsilon t}$$

Obtemos que

$$Cte^{\alpha t} = Cte^{-\varepsilon t} e^{(\alpha+\varepsilon)t} \leq Me^{(\alpha+\varepsilon)t}$$

onde $M = CM(\varepsilon) > 0$.

Aplicação as Equações Integrais Convolutivas

$$y(t) = f(t) + \int_a^t g(t-\tau)y(\tau)d\tau \quad (\text{EIC})$$

Procedendo formalmente, aplicamos \mathcal{L} em ambos os lados obtendo

$$Y(s) = F(s) + \mathcal{L}[g * y](s) = F(s) + G(s)Y(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{1-G(s)}.$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$, $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$, $G(s) = \mathcal{L}[g](s)$.

Aplicando \mathcal{L}^{-1} obtemos que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1-G(s)} \cdot F(s)\right](t) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1-G(s)}\right](\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Exemplo: Aplicação as Equações Integro - Diferenciais Convolutivas (coeficientes constantes) *1ª ordem*.

$$ay'(t) + by(t) = f(t) + \int_0^t g(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

Aplicando \mathcal{L} obtem-se

$$(as + b)Y(s) - ay(0^+) = F(s) + G(s)Y(s)$$

Logo

$$Y(s) = \frac{F(s) + ay(0^+)}{p_L(s) - G(s)}.$$

Aplicando \mathcal{L}^{-1} obtem-se

$$y(t) = ay(0^+) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p_L(s) - G(s)}\right](t) + \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p_L(s) - G(s)}\right](\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Aplicação as EDO's Lineares com coeficientes polinomiais.

$$PVI: \begin{cases} y'' + ty' - y = 0, & 0 < t < +\infty \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

OBS: $F(s) = \mathcal{L}[f](s) \Rightarrow \mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) . \square$

De modo que,

$$\mathcal{L}[ty'(t)](s) = -\frac{d}{ds}(sY(s) - y(0^+)) = -sY'(s) - Y(s) .$$

Aplicando \mathcal{L} a ambos os lados da EDO obtem-se

$$(s^2 Y(s) - sy(0^+) - y'(0^+)) - sY'(s) - Y(s) - Y(s) = 0$$

ou seja

$$Y'(s) + \left(\frac{2}{s} - s\right)Y(s) = -\frac{1}{s} .$$

Que é uma EDO Linear de 1ª ordem. De modo que,

$$\mu(t) = e^{\int (\frac{2}{s} - s) ds} = e^{2 \ln s - \frac{s^2}{2}} = s^2 e^{-\frac{s^2}{2}} \Rightarrow (\mu(s)Y(s))' = -se^{-\frac{s^2}{2}} \Rightarrow \mu(s)Y(s) = -\int se^{-\frac{s^2}{2}} ds + C$$

OBS: $\int se^{-\frac{s^2}{2}} ds = -\int e^{-\frac{s^2}{2}} d\left(-\frac{s^2}{2}\right) = -e^{-\frac{s^2}{2}} . \square$

Portanto,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + C \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2} .$$

Entretanto, se quisermos $y \in \mathcal{E}$ então necessariamente $C = 0$.

Conclusão: Aplicando \mathcal{L}^{-1} , obtem-se que a solução do PVI (em \mathcal{E}) é dada por

$$y(t) = t .$$

Exemplo:

$$PVI: \begin{cases} y'' + ty' + y = 0 \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}, 0 < t < \infty$$

Aplicando \mathcal{L} a ambos os lados da EDO obtem-se

$$s^2 Y(s) - sy(0^+) - y'(0^+) - sY'(s) - Y(s) + Y(s) = 0$$

Ou seja

$$Y'(s) - sY(s) = -\frac{1}{s}.$$

Neste caso,

$$\mu(s) = e^{\int -s ds} = e^{-s^2/2} \Rightarrow (\mu(s)Y(s))' = -\frac{e^{-s^2/2}}{s} \Rightarrow Y(s) = -e^{s^2/2} \int \frac{e^{-\tau^2/2}}{\tau} d\tau + Ce^{s^2/2}$$

Novamente, como queremos $y \in \mathcal{E}$, então necessariamente $C = 0$.

De modo que,

$$Y(s) = -e^{s^2/2} \int \frac{e^{-\tau^2/2}}{\tau} d\tau.$$

Entretanto, se aplicarmos \mathcal{L}^{-1} obteremos que

$$y(t) = -\mathcal{L}^{-1} \left[e^{s^2/2} \int \frac{e^{-\tau^2/2}}{\tau} d\tau \right] (t) = ?$$

OBS: Não existe $f \in \mathcal{E}$ tal que $\mathcal{L}[f](s) = e^{s^2/2}$. De modo que, não se pode aplicar a convolução. \square

Teorema: (Valor Inicial)

Hipótese: $f, f' \in \mathcal{E}$.

Tese: $\lim_{s \rightarrow +\infty} s \mathcal{L}[f](s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$.

Prova: $\mathcal{L}[f'](s) = s \mathcal{L}[f](s) - f(0^+)$ e $f' \in \mathcal{E} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f'](s) = 0$. Portanto,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s \mathcal{L}[f](s) = f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t). \quad \Rightarrow$$

Teorema: (Valor Final)

Hipótese: f, f' seccionalmente contínuas e limitadas sobre $[0, +\infty[$, com $|f'|$ integrável em $[0, +\infty[$.

Tese: $\lim_{s \rightarrow 0^+} s \mathcal{L}[f](s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

Prova: $\mathcal{L}[f'](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{L}[f'](s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt$.

Pela convergência uniforme obtida pelo teste de Weierstrass, uma vez que

$$\left| e^{-st} f'(t) \right| \leq |f'(t)|, \forall t > 0 \text{ e } \int_0^{+\infty} |f'(t)| dt < +\infty,$$

temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{s \rightarrow 0^+} e^{-st} f'(t) dt.$$

De modo que,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{L}[f'](s) = \int_0^{+\infty} f'(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f'(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} [f(T) - f(0^+)].$$

Portanto,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} (s \mathcal{L}[f](s) - f(0^+)) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{L}[f'](s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t) - f(0^+)). \quad \Leftrightarrow$$

Teorema: Hipótese: $F(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{1}{s^{k+1}}$, absolutamente convergente $\forall s > \alpha \geq 0$.

Tese:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{t^k}{k!}, \quad \forall t \geq 0.$$

Além disso, f é contínua e de ordem exponencial $\alpha_1, \forall \alpha_1 > \alpha$.

Aplicação ao cálculo de integrais parametrizadas.

Exemplo: Função Gama de Euler (fatorial generalizado):

O fatorial de um número inteiro positivo é por definição dado por

$$n! = 1.2.3 \dots (n-1).n$$

De modo que a função fatorial satisfaz a seguinte equação funcional

$$n! = n(n-1)!$$

Assim, para $n = 1$ obtemos que

$$1 = 1! = 1.0! = 0!$$

Se fizermos $n = 0$ obteremos que

$$(-1)! = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n!}{n} = \frac{0!}{0^\pm} = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty.$$

Mas então quando $n = -1$ obteremos que

$$(-1)! = (-1)(-2)! \Rightarrow \mp\infty = (-2)!$$

Analogamente, quando $n = -2$ obteremos que

$$(-2)! = (-2)(-3)! \Rightarrow \mp\infty = (-3)!$$

E assim sucessivamente. Ou seja, o fatorial de qualquer inteiro negativo será infinito!

Por outro lado, se $n \geq 0$ sabemos que

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \forall s > 0.$$

De modo que,

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \mathcal{L}[t^n](1) = n!.$$

Esse fato levou Euler a definir a seguinte generalização da função fatorial

Definição: A *Função Gama* (ou fatorial generalizado), denotada por $\Gamma(x)$, é dada por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \forall x > 0.$$

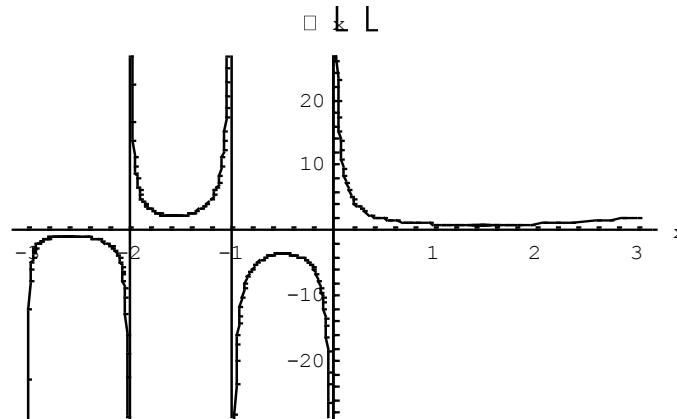
Propriedades

(P1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x > 0.$

(P2) $\Gamma(1) = 1.$

(P3) $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \geq 1.$

Gráfico



Com a função Gama podemos obter

$$\mathcal{L}[t^r](s), \forall r > -1.$$

Isso permite generalizar a noção de derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$ para **ordem fracionária!**

OBS:

$$\mathcal{L}[t^r f(t)](s) = (-1)^r \frac{d^r}{ds^r} \mathcal{L}[f](s), \forall r \in \mathbb{R}, r > -1. \quad \square$$

Teorema: Dado $r \in \mathbb{R}, r > -1$, tem-se que

$$\mathcal{L}[t^r](s) = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}} = \frac{(r+1)!}{s^{r+1}}, \forall s > 0.$$

Prova:

$$\mathcal{L}[t^r](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^r dt = \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^r d\left(\frac{u}{s}\right) = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}. \quad \leftarrow$$

Exemplo: Um exemplo de integral não trivial que todo estudante de Cálculo I conhece é o seguinte

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Através da transformada de Laplace podemos calcular tal integral. De fato, definindo a seguinte função (família parametrizada de integrais impróprias)

$$f(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx$$

Tem-se que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(s+x^2)t} dx dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(s+x^2)t} dt dx = \\ &= \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(s+x^2)t} dt dx = \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-(s+x^2)t}}{-(s+x^2)} \right) \Big|_0^T dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{s+x^2} = \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left[1+(x/\sqrt{s})^2\right]} = \frac{1}{\sqrt{s}} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{d(x/\sqrt{s})}{\left[1+(x/\sqrt{s})^2\right]} = \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\text{arc tg } \frac{x}{\sqrt{s}} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{s}} \end{aligned}$$

De modo que,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{s}}\right](t) = \frac{\pi}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right](t).$$

OBS: Pelo teorema anterior,

$$\mathcal{L}[t^{-1/2}](s) = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}. \square$$

Pelo exercício da lista, sabemos que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, o que implica em

$$f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} t^{-1/2}.$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = f(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

OBS: Solução apresentada por Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx \right) dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)t} dx dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)t} dt dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-(1+x^2)t}}{-(1+x^2)} \right) \Big|_0^{\infty} dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = (\text{arctg} x) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2 t} dx \right) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} t^{-1/2} du \right) dt$$

OBS: $u^2 := x^2 t \Rightarrow x = u/\sqrt{t} \Rightarrow dx = t^{-1/2} du$.

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2 t} dx \right) dt = \left(\int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right)$$

OBS: $v := t^{1/2} \Rightarrow t = v^2 \Rightarrow dt = 2v dv \Rightarrow t^{-1/2} dt = 2dv$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2 t} dx \right) dt &= \left(\int_0^{\infty} 2e^{-v^2} dv \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right) \\ &= 2 \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right)^2 \end{aligned}$$

De modo que,

$$\frac{\pi}{2} = \mathcal{L}[f](1) = 2 \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \square$$

Exemplo: Avaliar a família de integrais

$$h(t) = \int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{x^2 + a^2} dx, a > 0, t \geq 0. \quad (1)$$

Aplicando a transformada de Laplace à (1), obtém-se que

$$H(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{x^2 + a^2} dx dt \quad (2)$$

OBS: Tem-se que

$$h(t) = \int_0^{\infty} f(x, t) dx$$

onde $|f(x, t)| \leq \frac{1}{x^2 + a^2} = M(x)$ com $\int_0^{\infty} M(x) dx = \frac{\pi}{2a} < +\infty$. De modo que, pelo

Teste M de Weierstrass h é uniformemente convergente, portanto pode-se trocar a ordem de integração em (2) e obter-se que

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos tx dt dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} \left(\frac{s}{s^2 + x^2} \right) dx \end{aligned}$$

Usando frações parciais

$$\frac{1}{(x^2 + a^2)(s^2 + x^2)} = \frac{A}{x^2 + a^2} + \frac{B}{s^2 + x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/(s^2 - a^2) \\ B = -1/(s^2 - a^2) \end{cases} \quad \square$$

De modo que,

$$H(s) = \frac{s}{(s^2 - a^2)} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} - \frac{1}{x^2 + s^2} \right) dx = \frac{s}{(s^2 - a^2)} \left(\frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2s} \right) = \frac{\pi}{2a} \frac{1}{(s+a)}.$$

Sendo assim,

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H](t) = \frac{\pi}{2a} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \right] (t) = \frac{\pi}{2a} e^{-at}.$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-at}, a > 0, t \geq 0.$$

Aplicação às soluções fundamentais de equações diferenciais parciais.

Modelo Matemático para difusão do calor unidimensional (um fio semi-infinito de material homogêneo) com temperatura inicial ($t = 0$) igual a zero, com a extremidade ($x = 0$) mantida à temperatura constante $u_0 > 0$. O **Problema de Valor Inicial e de Fronteira** (PVIF) é dado por

$$(PVIF) : \begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & , x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & , x > 0 \\ u(0, t) = u_0 & , t > 0 \end{cases}$$

Onde $k^2 = K / c\rho$ é o coeficiente de difusividade, sendo K a condutividade térmica, c o calor específico do material do fio e ρ a densidade do fio. Como não existem no mundo real temperaturas infinitas, impõe-se a seguinte condição de limitação sobre a temperatura

$$|u(x, t)| \leq M, \forall x > 0, \forall t > 0. \quad (1)$$

Como a temperatura está definida, em cada variável, em domínios semi-infinitos, pode-se aplicar a transformada de Laplace tanto em relação ao espaço (variável x) quanto em relação ao tempo (variável t). Apliquemos em relação à variável t . Com isso obtemos que

$$\mathcal{L}[u_t](x, s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dt = s \mathcal{L}[u](x, s) - u(x, 0) = sU(x, s).$$

$$\mathcal{L}[k^2 u_{xx}](x, s) = k^2 \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) dt = k^2 \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt = k^2 \frac{d^2}{dx^2} U(x, s)$$

De modo que, obtemos a seguinte EDO

$$\frac{d^2}{dx^2} U(x, s) - \frac{s}{k^2} U(x, s) = 0. \quad (2)$$

OBS: Na verdade trata-se de uma família de EDO's parametrizadas pelo parâmetro real s . \square

Pela teoria das EDO's, para obtermos uma solução única de uma EDO de 2ª ordem precisamos impor duas condições iniciais. Entretanto, só temos uma condição inicial na variável x ! Realmente, a condição de fronteira é transformada em uma condição inicial para a função transformada $U(x, s)$, uma vez que

$$U(0, s) = \mathcal{L}[u(0, t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} u(0, t) dt = \int_0^\infty e^{-st} u_0 dt = u_0 \mathcal{L}[1](s) = \frac{u_0}{s}.$$

A solução geral da EDO (2) é dada por

$$U(x, s) = C_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{k} x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{k} x}.$$

Aqui é que será fundamental termos imposto a condição (1). Isso suprirá a falta de uma segunda condição inicial. De fato, de (1) obtem-se que

$$|U(x, s)| = \left| \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-st} |u(x, t)| dt \leq M \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{M}{s}, \forall s > 0.$$

De modo que, necessariamente $\lim_{s \rightarrow +\infty} U(x, s) = 0$.

Portanto,

$$U(x, s) = C_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{k} x}.$$

Agora sim podemos impor nossa única condição inicial sobre a solução geral para obtermos uma solução única. Fazendo isso, obtemos que

$$\frac{u_0}{s} = U(0, s) = C_2.$$

Portanto, a única solução do problema misto

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} U(x, s) - \frac{s}{k^2} U(x, s) = 0, x > 0 \\ U(0, s) = u_0 / s \\ |U(x, s)| \leq \tilde{M} \end{cases}$$

É

$$U(x, s) = \frac{u_0}{s} e^{-\frac{\sqrt{s}}{k} x}.$$

Então, a solução do (PVIF) será dada por

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[U(x, s)](x, t) = u_0 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{\sqrt{s}}{k} x}}{s}\right](x, t). \quad (3)$$

Para obtermos essa transformada inversa precisaremos de alguns resultados.

Proposição:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right](s) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}, \alpha \geq 0. \\ \text{(b)} \quad & \mathcal{L}\left[\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right](s) = e^{-\alpha\sqrt{s}}, \alpha > 0. \end{aligned}$$

Prova: Estratégia: transformar em um sistema de EDO's. Definindo as variáveis

$$Y_\alpha(s) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}, \alpha \geq 0, s > 0 \quad \text{e} \quad Z_\alpha(s) = e^{-\alpha\sqrt{s}}, \alpha > 0, s > 0.$$

Tem-se que

$$(sY_\alpha(s))' = -\frac{\alpha}{2}Z_\alpha(s) + \frac{1}{2}Y_\alpha(s) \quad \text{e} \quad Z'_\alpha(s) = -\frac{\alpha}{2}Y_\alpha(s).$$

OBS: De fato,

$$\begin{aligned} (sY_\alpha(s))' &= sY'_\alpha(s) + Y_\alpha(s) = s \left[\left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right)' e^{-\alpha\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}} (e^{-\alpha\sqrt{s}})' \right] + \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \\ &= s \left[\left(-\frac{1}{2} s^{-3/2} \right) e^{-\alpha\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}} (-\alpha\sqrt{s})' e^{-\alpha\sqrt{s}} \right] + \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \\ &= s \left[-\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{2\sqrt{s^3}} + \frac{1}{\sqrt{s}} \left(-\frac{\alpha}{2} s^{-1/2} \right) e^{-\alpha\sqrt{s}} \right] + \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \\ &= -\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}} - \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha\sqrt{s}} + \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2}Y_\alpha(s) - \frac{\alpha}{2}Z_\alpha(s) \end{aligned}$$

□

De modo que, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} sY'_\alpha(s) + \frac{1}{2}Y_\alpha(s) + \frac{\alpha}{2}Z_\alpha(s) = 0 \\ Z'_\alpha(s) + \frac{\alpha}{2}Y_\alpha(s) = 0 \end{cases}$$

Aplicando \mathcal{L}^{-1} , somos levados ao sistema

$$\begin{cases} -(ty_\alpha(t))' + \frac{1}{2}y_\alpha(t) + \frac{\alpha}{2}z_\alpha(t) = 0 \\ -tz_\alpha(t) + \frac{\alpha}{2}y_\alpha(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -ty'_\alpha - \frac{1}{2}y_\alpha + \frac{\alpha}{2}z_\alpha = 0 \\ z_\alpha = \frac{\alpha}{2t}y_\alpha \end{cases} \Rightarrow y'_\alpha + \left(\frac{1}{2t} - \frac{\alpha^2}{4t^2} \right) y_\alpha = 0$$

OBS:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[ty_\alpha](s) &= -Y'_\alpha(s) \Rightarrow s\mathcal{L}[ty_\alpha](s) = -sY'_\alpha(s) \\ \mathcal{L}[(ty_\alpha)'](s) &= s\mathcal{L}[ty_\alpha](s) - 0 \cdot y_\alpha(0) = -sY'_\alpha(s) \\ \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[sY'_\alpha(s)](s) &= -(ty_\alpha(t))' \end{aligned}$$

□

A qual é uma EDO linear de 1ª ordem, cujo fator integrante é dado por

$$\mu(t) = e^{\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{2t} - \frac{\alpha^2}{4t^2} \right) dt} = \sqrt{t} e^{\frac{\alpha^2}{4t}}.$$

Portanto, obtem-se que

$$y_\alpha(t) = \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \quad \text{e} \quad z_\alpha(t) = C \frac{\alpha}{2\sqrt{t^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}.$$

Se $\alpha = 0$, então

$$Y_0(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Rightarrow y_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right](t) = \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}, t > 0.$$

Logo, para $\alpha = 0$ e $t = 1$, temos que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = y_0(1) = C.$$

Resumindo, obteve-se que

$$y_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}, \alpha \geq 0, t > 0 \quad \text{e} \quad z_\alpha(t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}, \alpha > 0, t > 0.$$

OBS: Esta demonstração está correta desde que a constante C seja independente de α . \square

Uma demonstração direta de (a) e (b) pode ser dada da seguinte forma. Primeiro provamos (a) para $\alpha=1$ e depois utilizamos o 1º Teorema de Translação. De fato, como

$$y_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-1/4t}, t > 0, y_1(0) = 0,$$

é contínua $\forall t \geq 0$ e limitada, então $\forall s > 0$

$$\sqrt{\pi} Y_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{e^{-1/4t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\infty e^{-(s+\frac{1}{4t^2})t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = e^{-\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-(\sqrt{st}-\frac{1}{2\sqrt{t}})^2} d(2\sqrt{t})$$

fazendo a mudança $\tau = 2\sqrt{t}$ obtem-se que

$$(c) \quad \sqrt{\pi} e^{\sqrt{s}} Y_1(t) = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{s}}{2}\tau - \frac{1}{\tau}\right)^2} d\tau.$$

fazendo a mudança $\lambda = \frac{\sqrt{s}}{2}\tau$ obtem-se que

$$(d) \quad \sqrt{\pi} e^{\sqrt{s}} Y_1(s) = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \frac{\sqrt{s}}{2}\right)^2} \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Somando (c) e (d) obtem-se que

$$2\sqrt{\pi} e^{\sqrt{s}} Y_1(s) = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{s}}{2}\tau - \frac{1}{\tau}\right)^2} d\tau + \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \frac{\sqrt{s}}{2}\right)^2} \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Finalmente fazendo $\tau = \lambda$ na primeira integral obtem-se que

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\pi} e^{\sqrt{s}} Y_1(s) &= \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{s}}{2}\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2} \left(1 + \frac{2}{\lambda^2 \sqrt{s}}\right) d\lambda = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{s}}{2}\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2} \frac{2}{\sqrt{s}} \left(\frac{\sqrt{s}}{2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) d\lambda \\ &= \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{s}}{2}\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2} \left(\frac{\sqrt{s}}{2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) d\lambda = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{s}}{2}\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2} d\left(\frac{\sqrt{s}}{2}\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}. \end{aligned}$$

De modo que,

$$Y_1(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-1/4t}}{\sqrt{\pi t}}\right](s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}.$$

Para obtermos (a) para $\alpha > 0, \alpha \neq 1$, basta utilizar o seguinte resultado

1º Teorema da Translação:

Hipótese: $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$, para $s > \beta$.

Tese:

$$F(cs) = \frac{1}{c} \mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{c}\right)\right](s), \forall s > \frac{\beta}{c}, \forall c > 0.$$

Assim $\forall \alpha > 0$,

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\alpha\sqrt{s}} = Y_1(\alpha^2 s) = \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{L}\left[y_1\left(\frac{t}{\alpha^2}\right)\right](s) = \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{L}\left[\frac{e^{-\alpha^2/4t}}{\sqrt{\pi t/\alpha^2}}\right](s),$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-\alpha^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}\right](s) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}, \forall s > 0, \forall \alpha \geq 0.$$

Para provar (b), observamos que a função

$$z(t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\alpha^2/4t}, t > 0, z(0) = 0,$$

é contínua e limitada $\forall t \geq 0$. Além disso,

$$z(t) = \frac{\alpha}{2t} y_\alpha(t).$$

Aplicando o seguinte resultado

Teorema: *Hipótese:* $f \in \mathcal{E}$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} < +\infty$.

Tese: $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](\xi) d\xi, \forall s > \alpha_f$.

Prova: Observando que

$$F(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi t} f(t) dt$$

satisfaz as condições do teorema de Weierstrass $\forall \xi \geq \alpha_f$, obtem-se que se $r > s > \alpha_f$ então

$$\begin{aligned} \int_s^r F(\xi) d\xi &= \int_s^r \int_0^\infty e^{-\xi t} f(t) dt d\xi = \int_0^\infty f(t) \int_s^r e^{-\xi t} d\xi dt = \int_0^\infty f(t) \left[\frac{e^{-\xi t}}{-t} \right]_s^r dt \\ &= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt - \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-rt} dt. \end{aligned}$$

OBS: $f \in \mathcal{E}$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} < +\infty \Rightarrow \frac{f(t)}{t} \in \mathcal{E}$. De modo que, $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = 0$. \square

Portanto, fazendo $r \rightarrow +\infty$, obtem-se que

$$\int_s^\infty F(\xi) d\xi = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s).$$

Conclui-se então que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[z](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{\alpha}{2t} y\right](s) = \frac{\alpha}{2} \mathcal{L}\left[\frac{y}{t}\right](s) = \frac{\alpha}{2} \int_s^\infty Y(\xi) d\xi = \frac{\alpha}{2} \int_s^\infty \frac{e^{-\alpha\sqrt{\xi}}}{\sqrt{\xi}} d\xi = \int_s^\infty e^{-\alpha\sqrt{\xi}} d(\alpha\sqrt{\xi}) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-\alpha\sqrt{\xi}} \right)_s^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-\alpha\sqrt{s}} - e^{-\alpha\sqrt{b}}) = e^{-\alpha\sqrt{s}}. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\left[\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi} t^3} e^{-\alpha^2/4t}\right](s) = e^{-\alpha\sqrt{s}}, \alpha > 0, s > 0.$$

Agora já temos quase tudo que precisamos para obter a solução do PVIF dada pela transformada inversa (3). Entretanto, ainda necessitamos definir duas funções especiais muito importantes na Física-Matemática; as funções **erro** e **erro complementar**. Como motivação, lembramos que

$$\mathcal{L}[t^r](s) = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}, \forall r > -1.$$

Por outro lado,

$$(f * g)(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)](t).$$

Particularmente, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{s-1}\right](t) &= \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} * e^t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{(t-\tau)} d\tau = \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau \quad (r=\sqrt{\tau}) \\ &= \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-r^2} dr \end{aligned}$$

Definição: A função especial **erro** (*probability integral*) é dada por

$$\text{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-r^2} dr, \forall t \geq 0.$$

De modo que,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{s-1}\right](t) = e^t \text{erf}(\sqrt{t}).$$

Por outro lado, pelo 1º teorema da translação, temos que

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)](s) = F(s+a), \forall a \in \mathbb{R}.$$

Com isso obtemos que

$$\mathcal{L}[\operatorname{erf}(\sqrt{t})](s) = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}, \forall s > 0.$$

Lembrando também que

$$\mathcal{L}\left[\int_a^t f(x)dx\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(t)dt, \forall a \geq 0,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} &= \frac{Z(s)}{s} = \mathcal{L}\left[\int_0^t z(x)dx\right](s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\alpha^2/4x}}{x^{3/2}} dx\right](s) \\ &= \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{e^{-\alpha^2/4x}}{x^{3/2}} dx\right](s) \end{aligned}$$

fazendo a mudança $\lambda^2 = \alpha^2/4x$, obtemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s}\right](t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \int_{+\infty}^{\alpha/2\sqrt{t}} e^{-\lambda^2} \left(-\frac{4}{\alpha}d\lambda\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha/2\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

Assim somos levados a seguinte

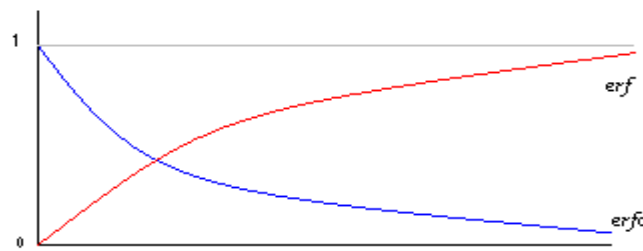
Definição: A função especial *erro complementar* é definida como sendo

$$\operatorname{erfc}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{+\infty} e^{-r^2} dr, \forall t \geq 0.$$

Propriedade:

$$\operatorname{erf}(t) + \operatorname{erfc}(t) = 1, \forall t \geq 0.$$

Gráfico:



De modo que,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s}\right](t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha/2\sqrt{t}} e^{-r^2} dr = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)\right](s) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s}, \forall \alpha \geq 0, \forall s > 0.$$

Conclusão: A solução do PVIF é dada por

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}[U(x,s)](x,t) = u_0 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\sqrt{s}\frac{x}{k}}}{s}\right](x,t) = u_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right).$$

Aplicação a Sistemas de Controle automático (Servomecanismos)

Objetivo: Controlar a rotação de uma haste (shaft) através de um ponteiro (controle).

Notação:

$\theta_o(t)$ = ângulo de giro da haste. (*output*)

$\theta_i(t)$ = ângulo de giro do ponteiro. (*input*)

Hipótese: A haste possui um momento de inércia $I \gg$ momento de inércia do ponteiro.

Definição: $\Phi(t) = \mathcal{L}(haste, ponteiro) = \theta_o(t) - \theta_i(t)$. (1)

Procedimento: Um sistema auxiliar (servomecanismo) é projetado para medir $\Phi(t)$ e retroalimentar a haste através de um torque que seja proporcional ao desvio $\Phi(t)$. Além disso, para produzir um “damping” no sistema o servomecanismo também produzirá um torque proporcional à variação do desvio $\Phi'(t)$.

OBS: O servomecanismo pode conter sua própria fonte de energia através de motor, gerador ou equipamento elétrico. □

Modelo matemático: O modelo matemático é consequência da seguinte lei da Física: “O produto de I pela aceleração angular é igual ao torque aplicado a haste”, ou seja, expressando matematicamente obtem-se

$$I\theta_o''(t) = -k\Phi(t) - c\Phi'(t) \quad (2)$$

OBS: Se utilizarmos (1) perceberemos que a EDO que está “por detrás” é

$$I\theta_o''(t) = -k(\theta_o(t) - \theta_i(t)) - c(\theta_o'(t) - \theta_i'(t)) = -k\theta_o(t) - c\theta_o'(t) + k\theta_i(t) + c\theta_i'(t)$$

ou seja,

$$I\theta_o''(t) + c\theta_o'(t) + k\theta_o(t) = k\theta_i(t) + c\theta_i'(t)$$

Ou seja, é uma EDO de 2ª ordem linear a coeficientes constantes, portanto do tipo

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t). \square$$

Hipóteses adicionais: $k, c > 0, \theta_i, \theta_i'$ contínuas em $[0, +\infty[$.

Condições iniciais: Como a haste está inicialmente em repouso, então

$$\theta_o(0) = \theta_o'(0) = 0. \quad (3)$$

Conclusão: O modelo matemático é dado pelo seguinte

$$PVI: \begin{cases} I\theta_o'' = -k\Phi - c\Phi', t > 0 \\ \theta_o(0) = \theta_o'(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando Laplace na equação (2), obtem-se

$$Is^2\theta_o(s) = -(k + sc)\Phi(s) - c\theta_i(0). \quad (3)$$

OBS: $\Phi(0) = -\theta_i(0)$ □

Por outro lado, aplicando Laplace em (1), obtem-se

$$\Phi(s) = \theta_o(s) - \theta_i(s). \quad (4)$$

De (3) e (4), segue-se

$$Is^2(\Phi(s) + \theta_i(s)) = -(k + sc)\Phi(s) - c\theta_i(0)$$

Donde

$$\Phi(s) = -\frac{(Is^2\theta_i(s) + c\theta_i(0))}{Is^2 + cs + k}.$$

Portanto, o desvio da haste será dado por

$$\Phi(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(Is^2\theta_i(s) + c\theta_i(0))}{Is^2 + cs + k}\right](t).$$

Em particular, se $\theta_i(t) = at$, obtem-se que

$$\Phi(s) = \frac{-al}{Is^2 + cs + k} = \frac{-a}{s^2 + \frac{c}{I}s + \frac{k}{I}} = \frac{-a\omega}{(s+b)^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{\omega}$$

onde $b = \frac{c}{2I}$, $\omega^2 = \frac{k}{I} - \frac{c^2}{4I^2}$.

De modo que,

$$\Phi(t) = -\frac{a}{\omega} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+b)^2 + \omega^2}\right](t) = -\frac{a}{\omega} e^{-bt} \text{sen } \omega t.$$

OBS: Supôs-se $\frac{k}{I} > \frac{c^2}{4I^2}$. Neste caso, $\Phi(t)$ é uma oscilação subcrítica (um “damping”).

Fórmula Complexa de Inversão

Se possuímos o ferramental matemático necessário para obtermos a inversão efetiva da transformada de Laplace a inversão será obtida através da **Fórmula Integral de Melin**.

Definição: Se $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$, então

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zt} F(z) dz, \quad \forall t > 0 \quad (\text{FI})$$

OBS: Tem-se que

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

“Complexificando” a variável independente, ou seja, fazendo $s = z = x+iy$, obtem-se que

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^{\infty} e^{-(x+iy)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} (e^{-xt} \cos yt - ie^{-xt} \operatorname{sen} yt) f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} \cos ytdt - i \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} \operatorname{sen} ytdt \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

Como f é então $\exists C > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq.

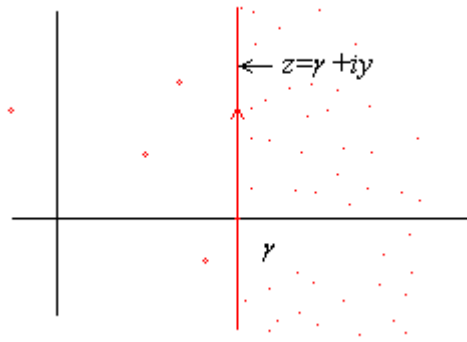
$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \quad \forall t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} \cos ytdt \right| \\ \left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} \operatorname{sen} ytdt \right| \end{cases} \leq C \int_0^{\infty} e^{-(x-\alpha)t} dt \leq \frac{C}{x-\alpha}, \quad \forall x > \alpha.$$

Logo, u e v estão bem definidos na faixa $\operatorname{Re}(z) > \alpha$. Por outro lado, usando Leibniz

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} \cos ytdt = \int_0^{\infty} -tf(t) e^{-xt} \cos ytdt \\ u_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} \cos ytdt = \int_0^{\infty} -tf(t) e^{-xt} \operatorname{sen} ytdt \\ v_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} \operatorname{sen} ytdt = \int_0^{\infty} -tf(t) e^{-xt} \operatorname{sen} ytdt \\ v_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} \operatorname{sen} ytdt \right) = -\int_0^{\infty} tf(t) e^{-xt} \cos ytdt \end{aligned}$$

De modo que, u e v são contínuas em $]0, \infty[\times \mathbb{R}$ e satisfazem as equações de **Cauchy-Riemann**. Portanto, $F(z)$ é analítica em $\operatorname{Re}(z) > \alpha$. \rightleftharpoons

(FI) é o método direto para obtenção de $\mathcal{L}^{-1}[F(z)](t)$. A integração é efetuada ao longo da reta $\operatorname{Re}(z) = \bullet$, onde \bullet é tal que as singularidades de $F(z)$ estão à esquerda de $\operatorname{Re}(z) = \bullet$.



Origem da Fórmula (FI): Trata-se de uma generalização da Fórmula Integral de Cauchy para retas $\text{Re}(z) = \bullet$ no caso em elas são a fronteira do semi-plano aonde $f(z)$ é analítica. Para isso necessitaremos ter alguma informação sobre o comportamento de $f(z)$ para $|z|$ arbitrariamente grande.

Definição: $f(z)$ é de ordem z^k quando $|z| \rightarrow \infty$, se $\exists M, r_0 > 0$ tais que;

$$|f(z)| < M |z|^k, \text{ se } |z| > r_0.$$

Notação: $f(z) = O(z^k)$.

Teorema: (Integral Imprópria de Cauchy)

Hip: $f(z)$ analítica sobre o semi-plano $\text{Re}(z) \geq \bullet$ e $f(z) = O(z^{-k}), k > 0$.

Tese: Se $\text{Re}(z_0) > \bullet$, então

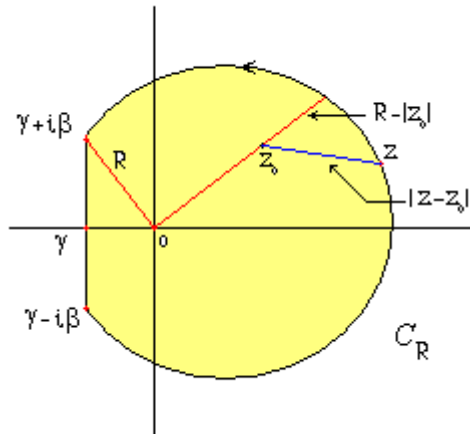
$$f(z_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\gamma+iy)}{(\gamma+iy-z_0)} dy$$

De modo que, se $F(z)$ é analítica em $\text{Re}(z) \geq \bullet$, $F(z) = O(z^{-k}), k > 0$, $|z| \gg 1$, tem-se que

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{F(z)}{(\omega-z)} dz, \forall \omega \in \mathbb{C}, \text{Re}(\omega) > \gamma.$$

Prova:

Seja C_R o arco do círculo $|z| = R: x \geq \bullet$, onde $R > \bullet$ e $R > |z_0|$. De modo que, $z_0 \in \text{int}(C_R \cup \{x = \bullet\})$. Definindo $\beta = \sqrt{R^2 - \gamma^2}$ tem-se, pela Fórmula Integral de Cauchy, que



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R \cup \{x=\gamma\}} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz + \int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz \right) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz - \int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz \right)$$

Quando $z \in C_R$ tem-se que $|z - z_0| \geq R - |z_0|$ e como $|f(z)| < M|z|^{-k}$, então se $|z| = R$, R suficientemente grande ($R \gg 1$), obtém-se que

$$\left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| \leq \frac{M}{|z|^k |z - z_0|} \leq \frac{M}{R^k (R - |z_0|)}, \text{ se } R > r_0, \text{ p/algum } r_0 \gg 1.$$

Os integrandos em $f(z_0)$ na expressão acima são contínuos. O comprimento de C_R é menor que $2\pi R$. Portanto, como

$$\left| \oint_C f(z) dz \right| \leq \oint_C |f(z)| |dz| \leq ML \Rightarrow \left| \oint_{C_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz \right| \leq \frac{M}{R^k (R - |z_0|)} 2\pi R = \frac{2\pi M}{R^k (1 - |z_0|/R)} \rightarrow 0$$

Quando $R \rightarrow +\infty$, pois $k > 0$. Além disso, como $R^2 = \uparrow^2 + \bullet^2$ a integral tb. Converge para 0 quando $\uparrow \uparrow + \mathbb{N}$. De modo que, tomando o limite $\uparrow \uparrow + \mathbb{N}$ obtém-se que

$$f(z_0) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{f(\gamma+iy)}{(\gamma+iy-z_0)} dy = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\gamma+iy)}{(\gamma+iy-z_0)} dy$$

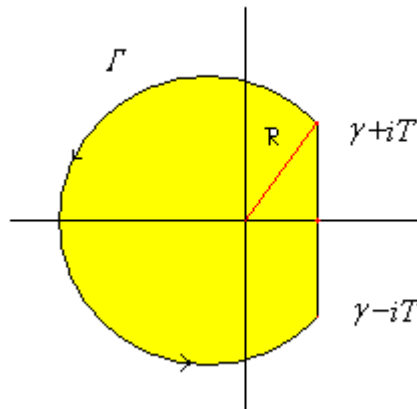
Então, procedendo formalmente, obtém-se que

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{F(z)}{(s-z)} dz\right](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-z}\right](t) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z) e^{zt} dz \end{aligned}$$

Contorno de Bromwich: Na prática a integral em (FI) é transformada numa integral de contorno

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_B} e^{zt} F(z) dz$$

onde $C_B = \gamma \cup \{Re z = \gamma\}$ é o contorno de Bromwich;



Tem-se que $T = \sqrt{R^2 - \gamma^2}$ donde $T \ll \mathbb{N}$ se sé se $R \ll \mathbb{N}$, donde

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{zt} F(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_B} e^{zt} F(z) dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{zt} F(z) dz \right)$$

OBS: Condição suficiente para que a integral sobre γ convirja para zero quando $R \ll \mathbb{N}$:

$$F(z) = O(z^{-k}) \quad (\text{CS})$$

para algum $k > 0$. Esta condição sempre ocorre quando, por exemplo, $F(z) = p(z)/q(z)$, para p e q polinômios com $\text{grau}(p) < \text{grau}(q)$.

Aplicação do teorema dos Resíduos à Inversão da Transformada de Laplace:

Se as singularidades de $F(s)$ são pólos (ordem finita) à esquerda de uma reta $Re z = \gamma$ e, além disso, tivermos

$$\int_{\Gamma} e^{zt} F(z) dz \rightarrow 0, \text{ qdo. } R \rightarrow +\infty$$

no contorno de Bromwich, então

$$f(t) = \sum_k \text{Re } s(e^{zt} F(z) : z_k), \quad z_k = \text{pólo de } F(z).$$

Exemplo: Calcule

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s+1)^3 (s-1)^2} \right] (t).$$

Pólos de $F(z) = \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3 (z-1)^2}$:

$$\begin{aligned}
z_1 = -1 \text{ (ordem 3)} &\Rightarrow \operatorname{Res}(e^{zt}F(z): -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{ze^{zt}}{(z-1)^2} \right] = a_{-1} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{(1+tz)e^{zt}(z-1)^2 - ze^{zt}2(z-1)}{(z-1)^4} \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{(1+tz)e^{zt}(z^2 - 2z + 1) - e^{zt}(2z^2 - 2z)}{(z-1)^4} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z^3 - 2z^2 + z)te^{zt} + e^{zt}(1 - z^2)}{(z-1)^4} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{[(2+zt)(z-1)^2 te^{zt} - 2ze^{zt}](z-1)^4 - e^{zt}[(1-z^2) + tz(z-1)^2]4(z-1)^3}{(z-1)^8} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{[(2-t)4te^{-t} + 2e^{-t}]2^4 - e^{-t}[-4t]4(-2^3)}{2^8} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2^6(2-t)te^{-t} + 2^5e^{-t} - 2^7te^{-t}}{2^8} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{(2-t)te^{-t}}{2^2} + \frac{e^{-t}}{2^3} - \frac{te^{-t}}{2} \right) = \frac{te^{-t}}{2^2} - \frac{t^2e^{-t}}{2^3} + \frac{e^{-t}}{2^4} - \frac{te^{-t}}{2^2} = \left(\frac{1}{2^4} - \frac{t^2}{2^3} \right) e^{-t}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 = 1 \text{ (ordem 2)} &\Rightarrow \operatorname{Res}(e^{zt}F(z): 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{(e^{zt} + tze^{zt})(z+1)^3 - 3ze^{zt}(z+1)^2}{(z+1)^6} \right] = \\
&= \frac{2^3(1+t)e^t - 3 \cdot 2^2 e^t}{2^6} = \frac{(1+t)}{2^3} e^t - \frac{3}{2^4} e^t = (2t-1) \frac{e^t}{2^4}.
\end{aligned}$$

De modo que,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2} \right] (t) = \frac{1}{2^3} \left(\frac{1}{2} - t^2 \right) e^{-t} + \frac{1}{2^4} (2t-1) e^t.$$

