Notas de aula: MTM146

Transformada de Laplace

Característica principal: Algebrizador de EDO's lineares, ou seja, transforma uma EDO linear numa equação algébrica.

Método:

$$PVI:\begin{cases} L[y](t)=f(t) \\ I_{t_0}(y)=\vec{\mathbf{y}}_0 \end{cases} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{L}[y]=\frac{p(s)}{q(s)} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} y(t)$$

Vantagens: Existem duas razões principais para a utilização da transformada de Laplace $\mathscr{L}$;

(i) O método tradicional de resolução de um *PVI* envolvendo uma EDO não homogênea requer três etapas: 1) resolver a homogênea associada através da obtenção de um conjunto fundamental, 2) obter uma solução particular, 3) impor as condições iniciais. A transformada de Laplace resolve a EDO incorporando simultaneamente as condições iniciais.

(ii) Resolve PVI's com forças externas *f(t)* mais gerais que as impostas pelo método dos coeficientes indeterminados.

(iii) Resolve equações integrais e integro-diferenciais.

Desvantagens:

(i) Só se aplica a PVI`s envolvendo EDO's lineares, principalmente à coeficientes constantes.

(ii) No caso de EDO's não-homogêneas, a não-homogeneidade tem que satisfazer certas restrições.

Definição: Dada $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ defini-se a ***transformada de Laplace*** de *f* como sendo a função dada por

$$\mathscr{L}[f](s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt.$$

OBS: Uma notação alternativa é $F(s)=\mathscr{L}[f](s)$. □

OBS: Uma justificativa operacional para a estrutura da transformada de Laplace é dada pelo seguinte fato: para que um operador integral nuclear

$$T[f](s)=\int_0^{\infty}K(s,t)f(t)dt=F(s)$$

possua a propriedade de transformar uma EDO em uma equação algébrica envolvendo $F(s)$ e as condições iniciais, observamos que

$$\begin{aligned} T[f'](s)&=\int_0^{\infty}K(s,t)f'(t)dt=K(s,t)f(t)\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}K'(s,t)f(t)dt \\ &=\lim_{T\to\infty}K(s,t)f(t)\Big|_0^{T}-\int_0^{\infty}K'(s,t)f(t)dt \\ &=K(s,0)f(0)-\int_0^{\infty}K'(s,t)f(t)dt \end{aligned}$$

Desde que se tenha $K(s,T)f(T)\to 0$, quando $T\to+\infty$(essa é uma condição adicional que se deve impor). A equação algébrica mais simples envolvendo $F(s)$ seria da forma $p(s)F(s)$, com $p(s)$ um polinômio em s. Para que se tenha uma compatibilidade entre a ordem da EDO e o grau da equação algébrica correspondente, impõe-se que o grau de $p(s)$ seja 1. O polinômio do primeiro grau mais simples é $p(s)=as$, com $a\in\mathbb{R}$. Para tudo isso seja atendido, basta impor que se tenha

$$K'(s,t)=asK(s,t)$$

onde a derivada é em relação a variável t. Resolvendo obtem-se que

$$K(s,t)=Ce^{ast}$$

Como a transformada atua sobre funções definidas para $t\geq 0$ e se necessita do comportamento assintótico $K(s,T)f(T)\to 0$, quando $T\to+\infty$, então é necessário tomar $a<0$, sendo mais simples tomarmos $a=-1$(e $C=1$), se quisermos que o domínio da função $F(s)$ contenha o semi-eixo positivo, ou seja,

$$K(s,t)=e^{-st}.\square$$

OBS: A integral imprópria acima é definida como sendo

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt=\lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)dt.$$

Quando para algum *s* o limite acima existe, diz-se que a integral converge nesse valor de *s*.

OBS: Quais devem ser as condições sobre *f* para que

$$\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

seja convergente quando $T\to+\infty$ para ao menos alguns valores de s?
Primeiramente, a função

$$e^{-st}f(t)$$

tem que ser integrável na variável t em qualquer intervalo $[0,T],\forall T>0$.Como e^{-st} é contínua $\forall t\in\mathbb{R}$,então basta que *f*(*t*) seja integrável $\forall t>0$, por exemplo seja contínua por partes em qualquer intervalo $[0,T],\forall T>0$. Já a questão da convergência quando $T\to+\infty$ é muito mais delicada e, na verdade, não se conhece uma condição necessária. Entretanto, uma condição suficiente é que *f* seja "dominada" por alguma exponencial de tal modo que se tenha o seguinte decaimento

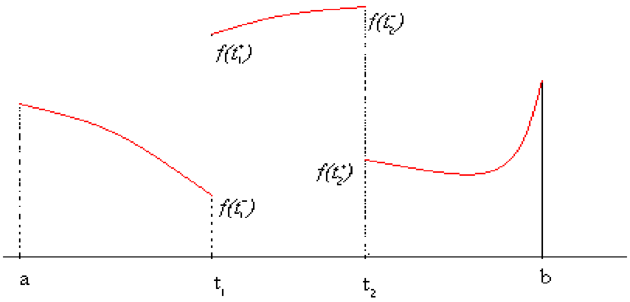
$$e^{-st}f(t)\to 0,\ \text{quando}\ t\to+\infty.\square$$

Definição: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é ***contínua por partes*** ou ***seccionalmente contínua*** em [*a*, *b*] se:

(i) $f\in C([a,b]-\{t_1,...,t_n\})$ isto é *f* só não é contínua no conjunto finito $\{t_1,...,t_n\}$ de [*a*, *b*].

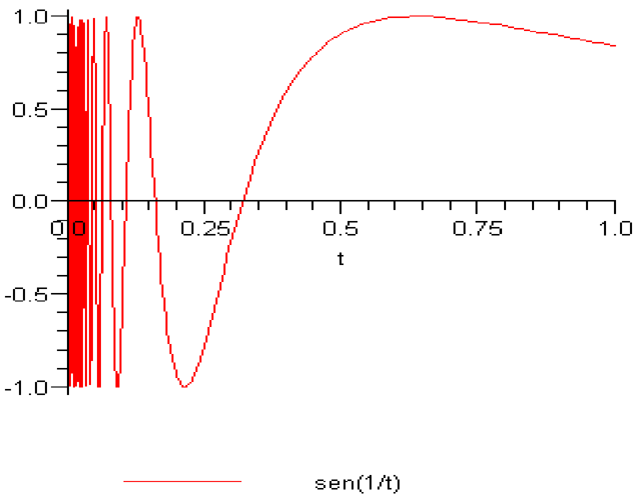
(ii) Existem os limites laterais nos pontos $t_1,...,t_n$, ou seja, as descontinuidades são apenas de salto, ou seja,

$$\exists f(t_k^+)=\lim_{t\to t_k^+}f(t)=\lim_{\delta\to 0^+}f(t_k+\delta)\ \text{e}\ \exists f(t_k^-)=\lim_{t\to t_k^-}f(t)=\lim_{\delta\to 0^+}f(t_k-\delta).$$



Notação: $C_p([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua por partes em } [a,b] \}$.

Exemplo: $f(t) = 1/t$ e $f(t) = sen(1/t)$ não são contínuas por partes em nenhum intervalo contendo a origem.



Propriedades das funções contínuas por partes

P1) $f \in C_p([a,b]) \Rightarrow \left| \int_a^b f(t)dt \right| < +\infty$.

P2) $f \equiv g$ em $[a, b]$ exceto nos pontos de descontinuidade $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$.

P3) $f, g \in C_p([a,b]) \Rightarrow f.g \in C_p([a,b])$.

P4) $f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in C_p([a,b])$.

Definição: $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ é de ***ordem exponencial*** em $]0,+\infty[$ se $\exists C,\alpha\in\mathbb{R}, C>0$,tq:

$$|f(t)|\le Ce^{\alpha t}, \forall t>0.$$

Exemplo:

$f\equiv 1$ é de ordem exponencial em $]0,+\infty[$ com $C=1,\alpha=0$.

$f(t)=t^n$ é de ordem exponencial em $]0,+\infty[$ com $C=1,\alpha>0$.

$f(t)=e^{at}$ é de ordem exponencial em $]0,+\infty[$ com $C=1,\alpha\ge a$.

$f(t)=\begin{cases} senbt \\ \cos bt \end{cases}$ é de ordem exponencial em $]0,+\infty[$ com $C=1,\alpha=0$.

$f(t)=\begin{cases} e^{at}\cos bt \\ e^{at} senbt \end{cases}$ é de ordem exponencial em $]0,+\infty[$ com $C=1,\alpha\ge a$.

$f(t)=\begin{cases} t^n e^{at}\cos bt \\ t^n e^{at} senbt \end{cases}$ é de ordem exponencial em $]0,+\infty[$ com $C=1,\alpha\ge a$.

Exemplo: $f(t)=e^{t^2}$ **não é** de ordem exponencial em $]0,+\infty[$, pois

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}}=\lim_{t\to+\infty}e^{t(t-\alpha)}=+\infty, \forall\,\alpha\in\mathbb{R}.$$

Definição: $\mathscr{E}=\{f:]0,+\infty[\to \mathrm{R}: f$ séc.contínua e de ordem exponencial em $]0,+\infty[\}$

Propriedade: $\mathscr{E}$ é um espaço vetorial real.

Teorema 1: *Se* $f\in\mathscr{E}$ *então existe* $\alpha\in\mathbb{R}$ *tal que*

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt$$

converge $\forall s>\alpha$.

Prova: Utilizaremos o seguinte critério de comparação

Lema: Se f e g são integráveis em todo intervalo $[a,b]$, onde a é fixo, e se $|f(t)|\le g(t),\forall t\ge a$, então

$$\int_a^{+\infty}f(t)dt \text{ converge se } \int_a^{+\infty}g(t)dt \text{ converge.}$$

Como $f\in\mathscr{E}$, $\exists C,\alpha\in\mathbb{R}, C>0$,tal que: $|f(t)|\le Ce^{\alpha t},\forall t>0$. Por outro lado,

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}(Ce^{\alpha t})dt=C\int_0^{+\infty}e^{-(s-\alpha)t}dt=C\lim_{T\to+\infty}\int_0^{T}e^{-(s-\alpha)t}dt=C\lim_{T\to+\infty}\left(\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\right]_0^T$$

$$=\frac{C}{(s-\alpha)}\lim_{T\to+\infty}\left(1-e^{-(s-\alpha)T}\right)=\frac{C}{(s-\alpha)}\text{ , se } s>\alpha.$$

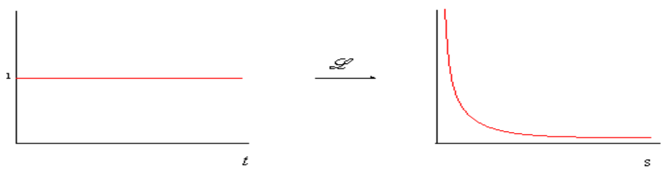
De modo que, pelo critério da comparação aplicado a $g(t)=Ce^{-(s-\alpha)t}$, obtem-se que

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt \text{ converge se } s>\alpha.$$

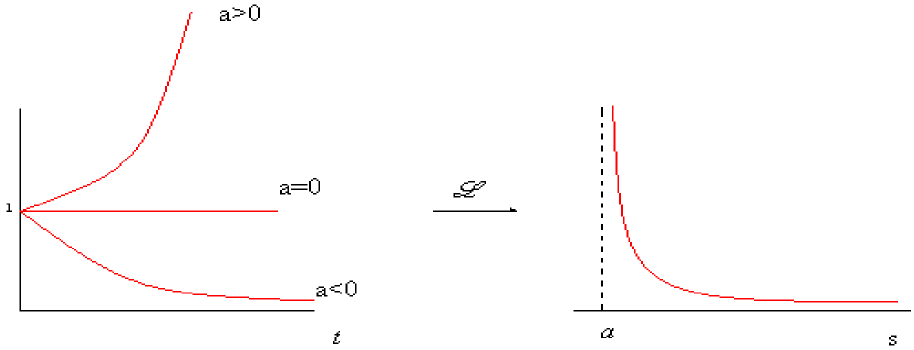
Conseqüência: O domínio da transformada de Laplace de uma função $f \in \mathscr{E}$ sempre contém um semi-eixo positivo $]\alpha,+\infty[$.

Exemplo: ***Cálculo de algumas transformadas***

$$\mathscr{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty}\int_0^{T} e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^T = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-sT}}{s}\right) = \frac{1}{s}\ ,\forall s>0\ .$$



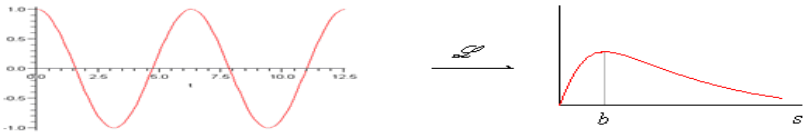
$$\mathscr{L}[e^{at}](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}dt = \lim_{T\to+\infty}\int_0^{T} e^{-(s-a)t}dt = \frac{1}{(s-a)}\ \ ,\ \forall s>a\ .$$



$$\mathscr{L}[\cos bt](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\cos bt dt = \lim_{T\to+\infty}\int_0^{T} e^{-st}\cos bt dt = \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{e^{-st}}{s^2+b^2}\left(-s\cos bt + bsenbt\right)\right]_0^T$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{e^{-sT}}{s^2+b^2}\left(-s\cos bT + bsenbT\right)+\frac{s}{s^2+b^2}\right] = \frac{s}{s^2+b^2}$$

se só se $s>0$.



Definição: Defini-se como ***abscissa de convergência*** de $\mathscr{L}[f]$ o número dado por

$$s_0 \triangleq \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : |\mathscr{L}[f](s)| < +\infty, \forall s > \alpha\}$$

Com isso quer-se dizer que

(i) $s_0 \le \alpha, \forall \alpha \in \Lambda$.

(ii) Se $\exists \beta \in \mathbb{R} : \beta \le \alpha, \forall \alpha \in \Lambda \Rightarrow \beta \le s_0$.

Pode-se mostrar que $\mathscr{L}[f](s)$ não converge para $s \le s_0$, de modo que

$$\mathrm{D}(\mathscr{L}[f]) =]s_0, +\infty[.$$

OBS: Se $f(t) = e^{-t^2}$ ou $f(t) = 0$ então $s_0 = -\infty$.

Pergunta: Já sabemos que se $f \in \mathscr{E}$ então $\exists \mathscr{L}[f]$. Será que vale a recíproca? Se $\exists \mathscr{L}[f](s), \forall s > s_0$, então $f \in \mathscr{E}$? A resposta é não, pois, por exemplo, $f(t) = 1/\sqrt{t} \notin \mathscr{E}$, mas $|\mathscr{L}[f](s)| < +\infty, \forall s > 0$.

A Transformada de Laplace como Transformação Linear

Conforme vimos $\mathscr{E}$ é um espaço vetorial onde sempre existe $\mathscr{L}[f]$. Portanto, é um bom domínio para $\mathscr{L}$. Agora, devemos achar um espaço vetorial real que sirva de contradomínio para $\mathscr{L}$.

Definição: $\mathsf{S} \triangleq \{F : I \to \mathbb{R} : I =]s_0, +\infty[\quad ou \quad [s_0, +\infty[\quad ou \quad s_0 \ge -\infty\}$.

Com a adição e multiplicação por escalar ponto a ponto, S é um espaço vetorial real. Além disso,

$$\mathscr{L} : \mathscr{E} \to \mathsf{S}$$

Pergunta: $\mathscr{L}[f+g](s) = \mathscr{L}[f](s) + \mathscr{L}[g](s), \forall f, g \in \mathscr{E}$?

Resposta: Nem sempre, pois se $f(t) = \cos at$ e $g(t) = -\cos at$, então

$$\mathscr{L}[f](s) + \mathscr{L}[g](s) = \frac{s}{s^2+a^2} + \left(-\frac{s}{s^2+a^2}\right) = 0, \text{ em }]0,+\infty[.$$

Mas não está definida para $s \le 0$. Por outro lado,

$$\mathscr{L}[f+g](s) = \mathscr{L}[0](s) = 0 \text{ em }]-\infty,+\infty[\ \ !\,?$$

Convenção: Identificaremos $F, G \in \mathrm{S}$ quando tivermos

$F(s) = G(s)$ em algum semi-eixo positivo $]a,+\infty[$.

Assim se obtém que

$$\mathscr{L}[\lambda f + g](s) = \lambda \mathscr{L}[f](s) + \mathscr{L}[g](s), \forall f, g \in \mathscr{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Pergunta: Núcleo ($\mathscr{L}$ **)** $=\{\vec{0}_{\mathscr{E}}\}$? Ou seja, $\mathscr{L}$ é injetiva e, portanto invertível sobre sua imagem?
Resposta: Não, pois conforme já sabemos pela propriedade P2, se $f, g \in \mathscr{E}$ só diferem em seus pontos de descontinuidade, então $\mathscr{L}[f] = \mathscr{L}[g]$, entretanto $f \ne g$.

Teorema 2: (Lerch)

Dadas $f, g \in \mathscr{E}$ tais que $\exists s_0 \in \mathrm{R}$ satisfazendo:

$$\mathscr{L}[f](s) = \mathscr{L}[g](s), \forall s \in]s_0,+\infty[$$

Então, excetuando os possíveis pontos de descontinuidade, tem-se que

$$f(t) = g(t), \forall t \in]0,+\infty[$$

Conclusão: $\mathscr{L} : \mathscr{E} \to \mathrm{S}$ é uma transformação linear que, se convencionarmos identificar funções em $\mathscr{E}$ que coincidem nos pontos de continuidade, satisfaz

$$\mathscr{L}[f](s) = F(s) \in \mathrm{S} \Leftrightarrow f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F](t) \in \mathscr{E}\,.$$

Definição: $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F](t)$ é denominada ***transformada inversa de Laplace*** da função $F(s) \in \mathrm{S}$.

Pergunta: $\mathscr{L} : \mathscr{E} \to \mathrm{S}$ é sobrejetiva, ou seja, $\mathscr{L}(\mathscr{E}) = \mathrm{S}$?
Resposta: Não! Isso por causa do seguinte resultado

Teorema 3: $f \in \mathscr{E} \Rightarrow \lim\limits_{s\to+\infty} \mathscr{L}[f](s) = 0$.

Prova: Pelo teorema 1,

$$\left|\mathscr{L}[f](s)\right| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt\right| \le \int_0^{+\infty} \left|e^{-st} f(t)\right| dt \le C\int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{C}{s-\alpha} \quad , \forall s > \alpha\,. \ \square$$

Conclusão: Funções como $1, s, sen s, \cos s, \dfrac{s}{s+a}$, pertencem a S, mas não possuem transformadas inversas em $\mathscr{E}$.

Teorema 4: *Seja* $f \in C(]0,+\infty[)$ *tal que* $f' \in \mathscr{E}$. *Então,*

$$\mathscr{L}[f'](s) = s\mathscr{L}[f](s) - f(0^+)$$

onde $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$. *Generalizando, se* $f, f', \ldots, f^{(n-1)} \in C(]0,+\infty[)$ *e* $f^{(n)} \in \mathscr{E}$, *então*

$$\mathscr{L}[f''](s) = s^2\mathscr{L}[f](s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{L}[f^{(n)}](s) = s^n\mathscr{L}[f](s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$

Prova: Apenas para o caso $n=1$, os outros casos seguem por indução finita.

$$\mathscr{L}[f'](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt = \left(e^{-st}f(t)\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$

$$= s\mathscr{L}[f](s) + \lim_{\substack{a\to 0^+\\ T\to+\infty}} \left(e^{-st}f(t)\right]_a^T$$

Agora vamos usar o seguinte fato

Lema: *Se* $f \in C(]0,+\infty[)$ *com* $f' \in \mathscr{E}$, *então* $f \in \mathscr{E}$.

Prova: Como $f' \in \mathscr{E}$ então $\exists C, \alpha \in \mathbb{R}, C > 0$ tal que $|f'(t)| \le Ce^{\alpha t}, \forall t > 0$, ou seja

$$-Ce^{\alpha t} \le f'(t) \le Ce^{\alpha t}$$

Integrando e desprezando as constantes de integração, obtém-se que

$$|f(t)| \le \frac{C}{\alpha}e^{\alpha t}. \quad \square$$

De modo que,

$$e^{-sT}f(T) \to 0, qdo. T \to +\infty, \forall s > \alpha.$$

Portanto,

$$\mathscr{L}[f'](s) = s\mathscr{L}[f](s) + \lim_{T\to+\infty} e^{-sT}f(T) - \lim_{a\to 0^+} e^{-sa}f(a) \quad \square$$

$$= s\mathscr{L}[f](s) - f(0^+)$$

Exemplo: $f(t) = -\frac{1}{a}\cos at \Rightarrow f'(t) = senat$.

Logo,

$$\mathscr{L}[senat](s) = s\mathscr{L}[-\tfrac{1}{a}\cos at](s) - f(0^+)$$

$$= -\frac{s}{a}\mathscr{L}[\cos at](s) - (-\frac{1}{a})$$

$$= -\frac{s}{a}(\frac{s}{s^2+a^2}) + \frac{1}{a} = \frac{a}{s^2+a^2}, \forall s > 0.$$

Exemplo: $\frac{d^n}{dt^n}t^n = n! \Rightarrow \mathscr{L}[D^n t^n](s) = \mathscr{L}[n!](s) = n!\mathscr{L}[1](s) = \frac{n!}{s}, \ \forall s > 0$.

Por outro lado,
$\mathscr{L}[D^n t^n](s) = s^n \mathscr{L}[t^n](s) - s^{n-1}.0^n - s^{n-2}(n0^{n-1}) - ... - n(n-1)...(n-(n-2)).0 = s^n \mathscr{L}[t^n](s)$

Logo, $\frac{n!}{s} = s^n \mathscr{L}[t^n](s) \Rightarrow \mathscr{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $\forall s > 0$.

OBS: Da última igualdade se obtém que $n! = s^{n+1}\mathscr{L}[t^n](s) = s^{n+1}\int_0^{+\infty} e^{-st}t^n dt, \forall s > 0$, em particular para s = 1, obtemos a generalização do fatorial de um número natural para qualquer número real que não seja um inteiro negativo, dado pela função especial ***função Gama de Euler***

$$\Gamma(x+1) = x! = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt \qquad \square$$

Aplicação da Transformada de Laplace a um PVI

Caso Particular:

$$PVI: \begin{cases} y'' - y = 1 \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{L}[y'' - y](s) = \mathscr{L}[1](s) \Rightarrow s^2\mathscr{L}[y](s) - 1 - \mathscr{L}[y](s) = \frac{1}{s}$$

ou seja,

$$(s^2 - 1)\mathscr{L}[y](s) = \frac{1+s}{s} \Rightarrow \mathscr{L}[y](s) = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} = \mathscr{L}[e^t](s) - \mathscr{L}[1](s) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}}$$

$$y(t) = e^t - 1, \forall t \geq 0.$$

Que é, exatamente, a única solução do *PVI*.

Caso Geral: Dados $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{E}$, $\vec{\mathbf{y}}_0 = (y(0), y'(0), ..., y^{(n-1)}(0))^T \in \mathbb{R}^n$, seja o

$$PVI: \begin{cases} L[y](t) = a_n y^{(n)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \\ I_0 y = \vec{\mathbf{y}}_0 \end{cases} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{L}[\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t)](s) = \mathscr{L}[f](s)$$

Usando as propriedades de $\mathscr{L}$, obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \mathscr{L}[y^{(k)}](s) = \mathscr{L}[f](s) \Rightarrow a_0\mathscr{L}[y](s) + \sum_{k=1}^{n} a_k[s^k \mathscr{L}[y](s) - s^{k-1}y(0^+) - s^{k-2}y'(0^+) - ...$$

$$... - y^{(k-1)}(0^+)] = \mathscr{L}[f](s) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k s^k \mathscr{L}[y](s) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} a_i s^{(k-1)-i} y^{(i)}(0^+) = \mathscr{L}[f](s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}[y](s) = \frac{\mathscr{L}[f](s) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} a_i s^{(k-1)-i} y^{(i)}(0^+)}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}}$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathscr{L}[f](s) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} a_i s^{(k-1)-i} y^{(i)}(0^+)}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k}\right] = \mathscr{L}^{-1}[\frac{\mathscr{L}[f](s) + q(s)}{p_L(s)}](t)$$

Teorema 5: *Se* $f \in \mathscr{E}$ *e* $a \geq 0$*,então*

$$L\left[\int_a^t f(x)dx\right](s)=\frac{1}{s}L[f](s)-\frac{1}{s}\int_0^a f(x)dx \quad ,\forall s>0$$

De um modo geral

$$L\left[\underbrace{\int_a^t \ldots \int_a^t f(x)dx\ldots dx}_{n}\right](s)=\frac{1}{s^n}L[f](s)-\frac{1}{s^n}\int_0^a f(x)dx-\frac{1}{s^{n-1}}\int_0^a\int_a^t f(x)dxdx-\ldots-$$

$$-\frac{1}{s}\int_0^a \underbrace{\int_a^t \ldots \int_a^t f(x)dx\ldots dx}_{n-1} \quad ,\forall s>0.$$

Prova:

A prova se baseia no fato de que se $f\in\mathscr{E}$ então $\int_a^t f(x)dx\in\mathscr{E}$ .De modo que,

$$\mathscr{L}\left[\int_a^t f(x)dx\right](s)=\int_0^\infty e^{-st}(\int_a^t f(x)dx)dt=\int_0^\infty\left(\int_a^t f(x)dx\right)d(\frac{e^{-st}}{-s})=$$

$$=\left(\frac{e^{-st}}{-s}\int_a^t f(x)dx\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\frac{1}{s}\int_a^0 f(x)dx+\frac{1}{s}\mathscr{L}[f](s)$$

A fórmula geral é provada iterando esse resultado. ⇄

Exemplo: Como se sabe $\int_0^t \cos axdx=\left(\frac{senax}{a}\right]_0^t=\frac{senat}{a}$. Então,

$$\mathscr{L}[\frac{1}{a}senat](s)=\frac{1}{s}\mathscr{L}[\cos at](s)\Rightarrow\mathscr{L}[senat](s)=\frac{a}{s}(\frac{s}{s^2+a^2})=\frac{a}{s^2+a^2},\forall s>0.$$

Exemplo: $\mathscr{L}[te^t](s)=?$ Tem-se que

$$\int_0^t xe^x dx=\int_0^t xde^x=\left(xe^x\right]_0^t-\int_0^t e^x dx=te^t-e^t+1.$$

De modo que,

$$\mathscr{L}[te^t-e^t+1](s)=\mathscr{L}[\int_0^t xe^x dx](s)=\frac{1}{s}\mathscr{L}[te^t](s).$$

Mas então

$$(1-\frac{1}{s})\mathscr{L}[te^t](s)=\mathscr{L}[e^t](s)-\mathscr{L}[1](s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}=\frac{1}{s(s-1)}.$$

O que resulta em

$$\mathscr{L}[te^t](s)=\frac{1}{(s-1)^2} \quad ,\forall s>1.$$

OBS: $\mathscr{L}[te^t](s)=\frac{1}{(s-1)^2}=-\frac{d}{ds}\frac{1}{s-1}=-\frac{d}{ds}\mathscr{L}[e^t](s)$. Coincidência?

1º Teorema da Translação:

$$\mathscr{L}[f](s)=\varphi(s) \Rightarrow \mathscr{L}[\frac{1}{b}e^{\frac{a}{b}t} f(\frac{t}{b})](s)=\varphi(bs-a), \forall b>0, \forall a\in\mathbb{R}.$$

Prova:

$$\mathscr{L}[\frac{1}{b}e^{\frac{a}{b}t} f(\frac{t}{b})](s)=\int_0^\infty e^{-st}(\frac{1}{b}e^{\frac{a}{b}t} f(\frac{t}{b}))dt=\int_0^\infty e^{-(bs-a)\tau} f(\tau)d\tau=\mathscr{L}[f](bs-a)=\varphi(bs-a)$$

$\square$

Corolário: $\mathscr{L}^{-1}[\varphi(bs-a)](t)=\frac{1}{b}e^{\frac{a}{b}t} f(\frac{t}{b})=e^{\frac{a}{b}t}\mathscr{L}^{-1}[\varphi(bs)](t), \forall b>0, \forall a\in \mathbb{R}$

$$\mathscr{L}^{-1}[\varphi(bs)](t)=e^{-\frac{a}{b}t}\mathscr{L}^{-1}[\varphi(bs-a)](t), \forall a\in \mathbb{R}.$$

Exemplo: Tem-se que

$$\mathscr{L}[\cos bt](s)=\frac{s}{s^2+b^2}$$

De modo que,

$$\mathscr{L}[e^{at}\cos bt](s)=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \quad , \forall a,b\in \mathbb{R}.$$

Exemplo: Calcular $\mathscr{L}^{-1}[\frac{2s+3}{s^2-4s+20}](t)$.

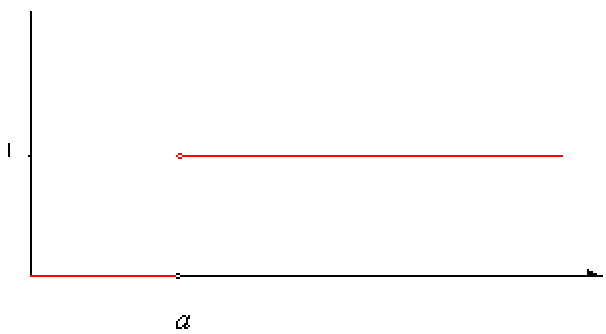
$$\frac{2s+3}{s^2-4s+20}=\frac{2s+3}{(s^2-4s+4)+16}=\frac{2(s-2)+7}{(s-2)^2+4^2}=2\frac{(s-2)}{(s-2)^2+4^2}+\frac{7}{4}\frac{4}{(s-2)^2+4^2}$$

De modo que,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{2s+3}{s^2-4s+20}](t)=2e^{2t}\cos 4t+\frac{7}{4}e^{2t}sen4t\,.$$

Definição: A ***função degrau unitário*** ou ***função de Heaviside*** é a seguinte função:

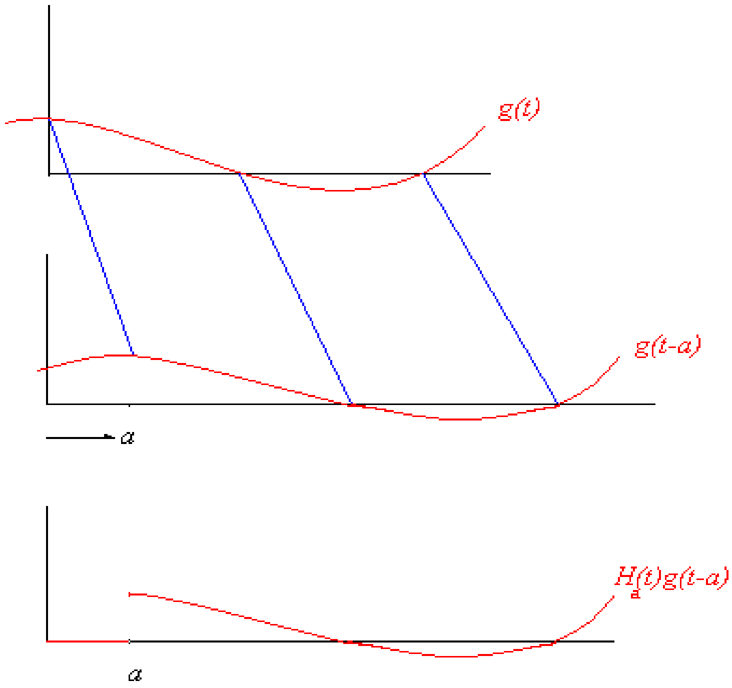
$$H_a(t)=\begin{cases}0 & ,t<a\\ 1 & ,t\geq a\end{cases} \quad (a\geq 0)$$



Aplicação:

Dada uma função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pode-se construir a seguinte função

$$H_a(t)g(t-a)\quad ,\forall a\in\mathbb{R}.$$



A interpretação física de tais funções é de que elas representam ***impulsos com retardamento*** em sistemas físicos, pois só passam a atuar no sistema após $t = a$.

2º Teorema da Translação:

$$Se\ \ f(t)=H_a(t)g(t-a)\in E,\ então\ \ \mathscr{L}[f](s)=e^{-as}\mathscr{L}[g](s),\forall a>0.$$

Prova:

$$\mathscr{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-st}H_a(t)g(t-a)dt=\int_a^\infty e^{-st}g(t-a)dt\underset{(\tau=t-a)}{=}\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}g(\tau)d\tau=e^{-as}\mathscr{L}[g](s)$$

Corolário:

$$\mathscr{L}^{-1}[e^{-as}\mathscr{L}[g](s)](t)=H_a(t)g(t-a)\quad ,\forall a>0.$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[H_a(t)sent](s)&=\mathscr{L}[H_a(t)sen(t+a-a)](s)=e^{-as}\mathscr{L}[sen(t+a)](s)\\&=e^{-as}\mathscr{L}[sent\cos a+sena\cos t](s)\\&=e^{-as}\left[\cos a\mathscr{L}[sent](s)+sena\mathscr{L}[\cos t](s)\right]\\&=e^{-as}\left[\cos a\frac{1}{s^2+1}+sena\frac{s}{s^2+1}\right]=e^{-as}\left(\frac{\cos a+s\sin a}{s^2+1}\right)\end{aligned}$$

Exemplo: Seja *f* uma função que possui o seguinte gráfico

Podemos calcular $\mathscr{L}[f]$ utilizando os teoremas acima. Basta observar que

$$f = f_1 + f_2 + f_3$$

$$f_1 \equiv 1 \quad , \quad f_2(t) = \begin{cases} 0 & ,0 \le t \le 1 \\ 1-t & ,t > 1 \end{cases}, \quad f_3(t) = \begin{cases} 0 & ,0 \le t \le 2 \\ t-2 & ,t > 2 \end{cases}$$

Assim tem-se que

$$f_2(t) = H_1(t)(-(t-1)) \quad , \quad f_3(t) = H_2(t)(t-2).$$

De modo que,

$$\mathscr{L}[f](s) = \mathscr{L}[1](s) + e^{-s}\mathscr{L}[-t](s) + e^{-2s}\mathscr{L}[t](s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{s - e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}.$$

Exemplo: $\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{e^{-3s}}{s^2+6s+10}](t) = ?$

Vamos usar o corolário: $\mathscr{L}^{-1}[e^{-as}\mathscr{L}[g](s)](t) = H_a(t)g(t-a) \ , \forall a > 0.$

Neste caso, temos que necessariamente $a = 3$. De modo que,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{e^{-3s}}{s^2+6s+10}](t) = H_3(t)g(t-3) \quad \text{onde} \quad \mathscr{L}[g](s) = \frac{1}{s^2+6s+10}.$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{s^2+6s+10} = \frac{1}{(s+3)^2+1} \Rightarrow g(t) = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s+3)^2+1}](t) = e^{-3t}\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+1}](t) = e^{-3t}sent$$

Portanto,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{e^{-3s}}{s^2+6s+10}](t) = H_3(t)e^{-3(t-3)}sen(t-3).$$

Teorema 6: $\mathscr{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}[f](s).$

Prova: *n=1*:

$$\frac{d}{ds}\mathscr{L}[f](s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st}f(t)\right)dt = \int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)dt = -\mathscr{L}[tf(t)](s).$$

n>1: indução sobre *n*.

Hipótese de Indução: Supondo que vale

$$\mathscr{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}[f](s).$$

Procedendo formalmente e derivando ambos os lados em relação a *s* obtem-se que

$$\int_0^\infty -t^{n+1}e^{-st}dt = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}t^n dt = (-1)^n \frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}F(s)$$

De modo que,

$$\int_0^\infty t^{n+1}e^{-st}dt = (-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}F(s)$$

Ou seja,

$$\mathscr{L}[t^{n+1}f(t)](s) = (-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}\mathscr{L}[f](s).\ \square$$

Corolário: $\mathscr{L}[f](s) = \varphi(s) \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}[\frac{d^n}{ds^n}\varphi(s)](t) = (-1)^n t^n \mathscr{L}^{-1}[\varphi](t)$.

Exemplo: $\mathscr{L}[tsent](s) = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}[sent](s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$.

Exemplo: $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s^2+1)^2}](t) = ?$

Vamos usar a propriedade $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right](s) = \frac{1}{s}\mathscr{L}[f](s)$ .Neste caso, obtém-se que

$$\int_0^t \mathscr{L}^{-1}[\varphi(s)](t)dt = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}\varphi(s)](t).$$

De modo que,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s^2+1)^2}](t) = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}\frac{s}{(s^2+1)^2}](t) = \int_0^t \mathscr{L}^{-1}[-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1})](t)dt$$

Por outro lado,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1})](t) = -t\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+1}](t) = -tsent$$

Assim,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s^2+1)^2}](t) = -\frac{1}{2}\int_0^t(-xsenx)dx = \frac{1}{2}\int_0^t xd(-cosx) = \frac{1}{2}sent - \frac{1}{2}t\cos t.$$

O próximo resultado é muito importante na análise de sinais periódicos, os quais são muito freqüentes na eletrônica.

Teorema 7: *Se* $f \in \mathscr{E}$ *é periódica de período T, então*

$$L[f](s) = \frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}} \quad ,\forall s > 0.$$

Prova:

$$\mathscr{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^T e^{-st}f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st}f(t)dt + \ldots + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st}f(t)dt + \ldots$$

Fazendo a mudança $t = x + nT$ na *(n+1)*-ésima integral obtém-se que

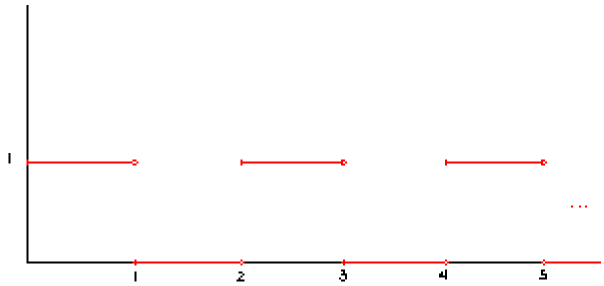
$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-sx} e^{-snT} f(x+nT)dx = e^{-snT} \int_0^T e^{-sx} f(x)dx$$

De modo que,

$$\mathscr{L}[f](s) = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + e^{-sT}\int_0^T e^{-sx} f(x)dx + \ldots + e^{-snT}\int_0^T e^{-sx} f(x)dx + \ldots$$
$$= \left(1 + e^{-sT} + \ldots + e^{-snT} + \ldots\right)\int_0^T e^{-sx} f(x)dx = \frac{1}{(1-e^{-sT})}\int_0^T e^{-sx} f(x)dx$$

Uma vez que $0 < e^{-sT} < 1, \forall s > 0$. $\square$

Exemplo: Obtenha a transformada de Laplace do seguinte sinal



Tem-se que

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ ,0 \le t < 1 \\ 0 \ ,1 \le t < 2 \\ f(t+2) = f(t) \end{cases}$$

De modo que,

$$\mathscr{L}[f](s) = \frac{\int_0^2 e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-2s}} = \frac{\int_0^1 e^{-st} dt}{1-e^{-2s}} = \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{1}{s(1+e^{-s})}.$$

Exemplo: Obter

$$\mathscr{L}[\text{sen}(t)](s)$$

Tem-se que

$$T = 2\pi \Rightarrow \mathscr{L}[\text{sen}(t)](s) = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-st} \,\text{sen}\, t dt}{1-e^{-2\pi s}} = \frac{\left.\frac{e^{-st}}{s^2+1}(-s\,\text{sen}\, t - \cos t)\right|_0^{2\pi}}{1-e^{-2\pi s}} = \frac{-e^{-2\pi s}+1}{(s^2+1)(1-e^{-2\pi s})} = \frac{1}{s^2+1}$$

Aplicações as EDO's a Coeficientes Polinomiais:

A segunda função especial que nós obteremos será a ***função de Bessel de 1ª espécie e ordem zero***, $J_0(t)$,dada pela solução do seguinte

$$PVI:\begin{cases} ty''+y'+ty=0 \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$$

Aplicando Laplace à EDO obtemos

$$-\frac{d}{ds}[s^2\mathscr{L}[y](s)-sy(0^+)-y'(0^+)]+(s\mathscr{L}[y](s)-y(0^+))-\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y](s)=0$$

Ou seja

$$-\frac{d}{ds}[s^2\mathscr{L}[y](s)-s]+s\mathscr{L}[y](s)-1-\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y](s)=0$$

Ou seja

$$(s^2+1)\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y](s)+s\mathscr{L}[y](s)=0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\mathscr{L}[y](s)+\frac{s}{s^2+1}\mathscr{L}[y](s)=0$$

A qual é uma EDO linear de 1ª ordem com fator integrante

$$\mu(s)=e^{\int\frac{s}{s^2+1}ds}=e^{\ln(s^2+1)^{1/2}}=(s^2+1)^{1/2}.$$

De modo que,

$$\mathscr{L}[y](s)=\frac{C}{\sqrt{s^2+1}}=\frac{C}{s}(1+\frac{1}{s^2})^{-1/2}.$$

OBS:

$$\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}=\sqrt{\frac{1}{s^2(1+\frac{1}{s^2})}}=\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}}=\frac{1}{s}(1+\frac{1}{s^2})^{-1/2}$$

OBS: Série de Taylor de $f(x)=(1+x)^r$ numa vizinhança de $x_0=0, \forall r\in\mathbb{R}$:

$$(1+x)^r=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3+\dots.$$

De modo que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}&=\frac{1}{s}\left(1+(-\tfrac{1}{2})s^{-2}+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}s^{-4}+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}s^{-6}+\dots\right)\\ &=\frac{1}{s}\left(1-\tfrac{1}{2}s^{-2}+\tfrac{3}{2^2 2!}s^{-4}-\tfrac{3.5}{2^3 3!}s^{-6}+\dots\right)\\ &=\frac{1}{s}\left(1-\tfrac{1}{2}s^{-2}+\tfrac{2.3.4}{2.2^2 2!.2^2}s^{-4}-\tfrac{2.3.4.5.6}{2.2^3 3!2^2.2.3}s^{-6}+\dots\right)\\ &=\frac{1}{s}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k!)}{(2^k k!)^2}\frac{1}{s^{2k}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k!)}{(2^k k!)^2}\frac{1}{s^{2k+1}}\end{aligned}$$

Teorema: *Hipótese:* $F(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\frac{1}{s^{k+1}}$, *absolutamente convergente* $\forall s>\alpha\geq 0$.

Tese:

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)](t)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{t^k}{k!}\ , \ \forall t\geq 0\,.$$

Além disso, f é contínua e de ordem exponencial $\alpha_1, \forall \alpha_1 > \alpha$.

Sendo assim, então

$$\mathscr{L}[y](s)=C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{(2^k k!)^2}\frac{1}{s^{2k+1}}$$

Procedendo formalmente e aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos

$$y(t)=C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{(2^k k!)^2}\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^{2k+1}}](t)=C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{(2^k k!)^2}\frac{t^{2k}}{(2k)!}=C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2^k k!)^2}t^{2k}$$

Agora, impondo a condição inicial $y(0)=1$, conclui-se que

$$\boxed{J_0(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2^k k!)^2}t^{2k}}$$

Generalização: A ***equação de Bessel de 1ª espécie e de ordem n*** é dada por

$$\boxed{t^2y''+ty'+(t^2-n^2)y=0}\ .$$

Possui como uma das soluções a ***função de Bessel de 1ª espécie e ordem n*** dada por

$$\boxed{J_n(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!((n+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k},t>0.}$$

Aplicação a PVI com condições iniciais em $t_0\neq 0$

Consideremos o seguinte

$$PVI:\begin{cases} y''+y=1\\ y(\pi)=a, y'(\pi)=b\end{cases}$$

Fazendo a mudança $x=t-\pi$ obtemos que $\tilde{y}(x)=y(x+\pi)=y(t)$ satisfaz as seguintes condições

$$\tilde{y}(0)=y(\pi), \tilde{y}'(0)=y'(\pi), \tilde{y}''(x)=y''(t)$$

De modo que, o PVI original se transforma no seguinte

$$PVI:\begin{cases} \tilde{y}''+\tilde{y}=1\\ \tilde{y}(0)=a, \tilde{y}'(0)=b\end{cases}$$

Esse nós podemos aplicar Laplace para obter

$$\mathscr{L}[\tilde{y}''(x)](s)+\mathscr{L}[\tilde{y}(x)](s)=\mathscr{L}[1](s)\Rightarrow[s^2\mathscr{L}[\tilde{y}](s)-s\tilde{y}(0)-\tilde{y}'(0)]+\mathscr{L}[\tilde{y}](s)=\frac{1}{s}$$

ou seja

$$(s^2+1)\mathscr{L}[\tilde{y}](s)=\frac{1}{s}+as+b\Rightarrow\mathscr{L}[\tilde{y}](s)=\frac{1}{s(s^2+1)}+\frac{as+b}{(s^2+1)}$$

De modo que,

$$\tilde{y}(x) = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s(s^2+1)}](x) + \mathscr{L}^{-1}[\frac{as+b}{(s^2+1)}](x)$$

Agora,

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} 1-\cos x \quad ; \quad \frac{as+b}{s^2+1} = a\frac{s}{s^2+1} + b\frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} a\cos x + bsenx$$

De modo que,

$$\tilde{y}(x) = 1 + (a-1)\cos x + bsenx$$

Retornando a variável inicial, obtem-se que a solução do PVI original é dada por

$$y(t) = 1 + (a-1)\cos(t-\pi) + bsen(t-\pi)\,.$$

Função Impulso Unitário (Delta de Dirac)

As forças impulsivas aparecem geralmente como "forças externas" em EDO's do tipo

$$ay'' + by' + cy = g_\varepsilon(t)$$

onde $\varepsilon > 0$ e $g_\varepsilon(t)$ é zero exceto num intervalo $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$, no qual é "muito grande", ou seja $g_\varepsilon(t)$ é uma ***força concentrada em*** t_0.

Definição: A integral imprópria

$$\boxed{I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(t)dt}$$

é o ***impulso total*** aplicado pela força impulsiva $g_\varepsilon(t)$.

Exemplo: Consideremos a seguinte força impulsiva

$$d_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} \;, & -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 0 \;, & t < -\varepsilon \vee t > \varepsilon \end{cases}$$

Neste caso o impulso total é dado por

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} d_\varepsilon(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \tfrac{1}{2\varepsilon}\,dt = 1, \forall \varepsilon > 0\,.$$

Concentração da força impulsiva d_ε **:** é quando se faz $\varepsilon \to 0^+$.

Tem-se que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} d_\varepsilon(t) = +\infty$$

Por outro lado,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I(\varepsilon) = 1$$

De modo que, no limite se obtém um "objeto matemático" surpreendente!

$$d_0(t) = \begin{cases} +\infty \;, & t = 0 \\ 0 \;, & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{satisfazendo} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d_0(t)dt = 1 \;\; !?$$

Esse novo objeto impôs uma generalização do conceito usual de função.

Definição: A "função" ***delta de Dirac*** ou ***função impulso unitário***, δ, é caracterizada pelas seguintes propriedades

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty \ , \ t=0\\ 0 \quad , \ t\neq 0\end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1.$$

OBS: Não existe função do Cálculo Elementar satisfazendo tais propriedades. O δ é o primeiro exemplo de uma ***função generalizada*** ou ***distribuição***. □

Definição: O impulso unitário em $t_0 \neq 0$ é dado por

$$\delta(t-t_0)$$

e denotado por δ_{t_0} .De modo que,

$$\delta_{t_0}(t)=\begin{cases}+\infty, t=t_0\\ 0, t\neq t_0\end{cases} \text{ com } \int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{t_0}(t)dt=1.$$

Apesar de δ_{t_0} não ser uma função, pode-se obter a transformada de Laplace de δ_{t_0} através de um processo limite. Denota-se δ por δ_0.

Definição: $\mathscr{L}[\delta_{t_0}](s)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathscr{L}[d_\varepsilon(t-t_0)](s), \forall t_0>0$.

De modo que,

$$\mathrm{L}[\delta_{t_0}](s)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty}e^{-st}d_\varepsilon(t-t_0)dt=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}e^{-st}\frac{1}{2\varepsilon}dt=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\varepsilon s}\left(-e^{-s(t_0+\varepsilon)}+e^{-s(t_0-\varepsilon)}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}e^{-st_0}\frac{senhs\varepsilon}{s\varepsilon}$$

Aplicando L'hospital, obtem-se que

$$\mathscr{L}[\delta_{t_0}](s)=e^{-st_0}, \forall t_0>0, \forall s\neq 0.$$

OBS: Surpreendentemente,

$$\lim_{s\to+\infty}\mathscr{L}[\delta_{t_0}](s)=0, \text{ mas } \delta_{t_0}\notin\mathscr{E}\ ! \quad □$$

OBS: Passando o limite $t_0 \to 0^+$, obtem-se que

$$\mathscr{L}[\delta_0](s)=1. □$$

Definição:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{t_0}(t)f(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}d_\varepsilon(t-t_0)f(t)dt \quad ,\forall f\in C(\mathbb{R}).$$

Utilizando o TVM para integrais, obtem-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}d_\varepsilon(t-t_0)f(t)dt=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}f(t)dt=\frac{1}{2\varepsilon}(2\varepsilon)f(t^*)=f(t^*)$$

para algum $t^*\in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$. Logo, $t^*\to t_0$, quando $\varepsilon\to 0^+$, de modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_0}(t) f(t)dt = f(t_0) \ , \forall f \in C^0(\mathbb{R}).$$

Exemplo: Resolva o seguinte

$$PVI : \begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta_\pi(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando $\mathscr{L}$ obtemos que

$$s^2 \mathscr{L}[y](s) - sy(0^+) - y'(0^+) + 2(s\mathscr{L}[y](s) - y(0^+)) + 2\mathscr{L}[y](s) = e^{-s\pi}$$

ou seja

$$(s^2 + 2s + 2)\mathscr{L}[y](s) = e^{-s\pi} \Rightarrow \mathscr{L}[y](s) = \frac{e^{-s\pi}}{s^2 + 2s + 2}$$

Aplicando $\mathscr{L}^{-1}$

$$y(t) = e^{\pi} \mathscr{L}^{-1}[\frac{e^{-\pi(s+1)}}{(s+1)^2 + 1}](t) = e^{\pi} e^{-t} \mathscr{L}^{-1}[\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}](t) = e^{-(t-\pi)} H_\pi(t) \operatorname{sen}(t - \pi) =$$
$$= -e^{-(t-\pi)} H_\pi(t) sent$$

Convolução:

Pergunta: $\mathscr{L}[f.g](s) = \mathscr{L}[f](s).\mathscr{L}[g](s)$?
Resposta: Não!

Contra-Exemplo:

$$f \equiv 1, g(t) = t \Rightarrow \mathscr{L}[f](s) = \frac{1}{s}, \mathscr{L}[g](s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathscr{L}[f](s)\mathscr{L}[g](s) = \frac{1}{s^3}.$$

Entretanto, $\mathscr{L}[fg](s) = \mathscr{L}[t](s) = \dfrac{1}{s^2}$.

Por outro lado, pela 2ª propriedade da translação, tem-se que

$$e^{-\tau s} \mathscr{L}[g](s) = \mathscr{L}[H_\tau(t) g(t-\tau)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t-\tau)dt \quad , \forall \tau > 0.$$

OBS: De fato,

$$e^{-\tau s} \mathscr{L}[g](s) = \mathscr{L}[H_\tau(t) g(t-\tau)](s) = \int_\tau^{+\infty} e^{-st} g(t-\tau)dt$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-s(\theta+\tau)} g(\theta)d\theta \qquad ,(\theta = t - \tau).$$

Por outro lado,

$$\mathscr{L}[g(t-\tau)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t-\tau)dt = \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-s(\theta+\tau)} g(\theta)d\theta$$
$$= \left(\int_{-\tau}^{0} + \int_0^{+\infty} \right) e^{-s(\theta+\tau)} g(\theta)d\theta$$

Como $g \in \mathscr{E}$,então $D(g) =]0,+\infty[\Rightarrow g \equiv 0$, $\forall \theta \in [-\tau, 0], \forall \tau > 0$. De modo que,

$$\mathscr{L}[g(t-\tau)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-s(\theta+\tau)} g(\theta)d\theta = e^{-\tau s}\mathscr{L}[g](s), \forall \tau > 0. \square$$

Portanto, se $f, g \in \mathscr{E}$ possuem transformadas definidas em $]\alpha, +\infty[$, então

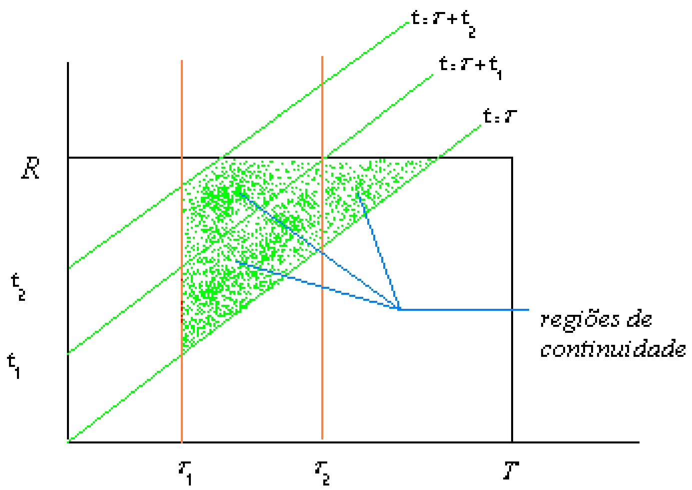
$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f](s)\mathscr{L}[g](s) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)dt\right) \\
&= \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\left(\int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)dt\right)d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\mathscr{L}[g](s)d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} f(\tau)\mathscr{L}[g(t-\tau)](s)d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} f(\tau)\int_0^{+\infty} e^{-st} g(t-\tau)dtd\tau = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-st} g(t-\tau)dtd\tau
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathscr{L}[f](s)\mathscr{L}[g](s) = \lim_{T\to+\infty}\int_0^{T}\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-st} g(t-\tau)dtd\tau < +\infty \qquad (1)$$

Uma vez que, $\mathscr{L}[f](s), \mathscr{L}[g](s) < +\infty, \forall s > \alpha$.

OBS: Fixados $T > 0, R > 0$,tem-se que o integrando em (1) é contínuo em sub-regiões contidas no retângulo $\mathcal{R} : 0 \le \tau \le T, 0 \le t \le R$. Uma vez que, se os saltos de f em $[0,T]$ ocorrem nos pontos $\tau_k, (k = 1,.., m)$ e os saltos de g em $[0, R]$ ocorrem nos pontos $t_i, (i = 1,..., n)$, então os saltos do integrando ocorrem nas retas; $\tau = \tau_k, t = \tau + t_i$.



Teorema: ***Teste M de Weierstrass*** *para convergência uniforme de integrais do tipo*

$$F(x)=\int_0^{+\infty} f(x,t)dt \ \ ,0\le x\le c\,.$$

Hipótese:

(H1) $f(x,t)$ *contínua em regiões poligonais (nº finito) contidas em retângulos:*

$$0\le x\le c, 0\le t\le T\,.$$

(H2)Existe uma função seccionalmente contínua M(t) satisfazendo

$$|f(x,t)|\le M(t)\ ,0\le x\le c,\forall t>0$$

e

$$\int_0^{+\infty} M(t)dt<+\infty\,.$$

Tese: A integral F(x) é uniformemente convergente em relação ao parâmetro $x\in[0,c]$.

OBS: Para podermos inverter a ordem de integração em (1) é necessário estabelecer a convergência uniforme da integral imprópria em (1) em relação ao parâmetro $\tau\in[0,T]$.□

Entretanto, devido à $f,g\in\mathscr{E}$, existe $C>0,\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$\left|f(\tau)e^{-st}g(t-\tau)\right|\le Ce^{-s\tau}e^{-st}e^{\alpha(t-\tau)}=Ce^{(\alpha-s)t}:=M(t) \qquad (2)$$

onde $M(t)$ satisfaz ao teste M de Weierstrass, pois independe do parâmetro τ e

$$\int_0^{+\infty} M(t)dt<+\infty,\forall s>\alpha\,.$$

De modo que, (1) pode ser reescrito como

$$\mathscr{L}[f](s)\mathscr{L}[g](s)=\lim_{T\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-st}\int_0^T f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt=\lim_{T\to+\infty}\left[I_1(T)+I_2(T)\right]$$

onde

$$I_1(T)=\int_0^T e^{-st}\int_0^T f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt$$

$$I_2(T)=\int_T^{+\infty} e^{-st}\int_0^T f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt$$

De (2), obtem-se que

$$|I_2(T)|\le C\int_T^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}\int_0^T d\tau dt=C\frac{e^{-(s-\alpha)T}T}{(s-\alpha)} \quad ,\forall s>\alpha\,.$$

De modo que,

$$\lim_{T\to+\infty} I_2(T)=0\,.$$

Por outro lado, a região de integração de $I_1(T)$ é o quadrado: $0\le\tau\le T, 0\le t\le T$, sendo que $g(t-\tau)$ não está definida para $\tau>t$ podendo, portanto, ser definida igual a zero nessa região. Com isso, obtem-se que

$$I_1(T)=\int_0^T e^{-st}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt\,.$$

De modo que,

$$\mathscr{L}[f](s)\mathscr{L}[g](s)=\lim_{T\to+\infty} I_1(T)=\int_0^{+\infty} e^{-st}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt\,.$$

Definição: A ***convolução*** de duas funções f e g, denotada por $f*g$, é dada pela seguinte função

$$(f*g)(t):=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\,.$$

Teorema:
Hipóteses: $f,g\in\mathscr{E}$ *com* $\mathscr{L}[f](s),\mathscr{L}[g](s)$ *definidas em* $0\le\alpha<s<+\infty$.
Tese:

$$\mathscr{L}[f](s).\mathscr{L}[g](s)=\mathscr{L}[f*g](s)$$

$\forall s>\alpha$.

Corolário: $$(f*g)(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s).G(s)](t)\,.$$

Propriedades:
(P1) $f*g=g*f$
(P2) $f*(g+h)=f*g+f*h$
(P3) $f*(g*h)=(f*g)*h$
(P4) $f*0=0$
(P5) $\tilde{f}*\delta_0=\tilde{f}$, $\tilde{f}(t)=\begin{cases} f(t), 0\le t<+\infty\\ 0 \quad ,\quad t<0\end{cases}$

OBS: $\tilde{f}\in C(\mathbb{R})\Leftrightarrow f\in C(\overline{\mathbb{R}^+})$ e $f(0)=0$. □

Pergunta: $f,g\in\mathscr{E}\Rightarrow f*g\in\mathscr{E}$?
Resposta: Sim!
De fato, $f,g\in\mathscr{E}\Rightarrow\exists C_f,C_g>0,\exists\alpha_f,\alpha_g\in\mathbb{R}$: $|f(t)|\le C_f e^{\alpha_f t},|g(t)|\le C_g e^{\alpha_g t},\forall t>0$
De modo que,
$|f(\tau)g(t-\tau)|\le Ce^{\alpha_f\tau+\alpha_g(t-\tau)}\le Ce^{\alpha t}$, onde $C=C_fC_g,\alpha=\max\{\alpha_f,\alpha_g\}$. Logo,

$$|(f*g)(t)|\le\int_0^t|f(\tau)g(t-\tau)|d\tau\le C\int_0^t e^{\alpha t}d\tau=Cte^{\alpha t},\forall t>0\,.$$

Por outro lado, dado $\varepsilon>0$, definindo

$$M(\varepsilon)=\max_{0\le t<\infty} te^{-\varepsilon t}$$

Obtemos que

$$Cte^{\alpha t}=Cte^{-\varepsilon t}e^{(\alpha+\varepsilon)t}\le Me^{(\alpha+\varepsilon)t}$$

onde $M=CM(\varepsilon)>0$.

Aplicação as Equações Integrais Convolutivas

$$y(t)=f(t)+\int_a^t g(t-\tau)y(\tau)d\tau \qquad \text{(EIC)}$$

Procedendo formalmente, aplicamos $\mathscr{L}$ em ambos os lados obtendo

$$Y(s) = F(s) + \mathscr{L}[g * y](s) = F(s) + G(s)Y(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{1-G(s)}.$$

onde $Y(s) = \mathscr{L}[y](s), F(s) = \mathscr{L}[f](s), G(s) = \mathscr{L}[g](s)$.

Aplicando $\mathscr{L}^{-1}$ obtemos que

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{1-G(s)} \cdot F(s)](t) = \int_0^t \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{1-G(s)}](\tau) f(t-\tau)d\tau .$$

Exemplo: ***Aplicação as Equações Integro - Diferenciais Convolutivas*** (coeficientes constantes) ***1ª ordem***.

$$ay'(t) + by(t) = f(t) + \int_0^t g(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

Aplicando $\mathscr{L}$ obtem-se

$$(as+b)Y(s) - ay(0^+) = F(s) + G(s)Y(s)$$

Logo

$$Y(s) = \frac{F(s) + ay(0^+)}{p_L(s) - G(s)} .$$

Aplicando $\mathscr{L}^{-1}$ obtem-se

$$y(t) = ay(0^+)\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p_L(s)-G(s)}](t) + \int_0^t \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p_L(s)-G(s)}](\tau) f(t-\tau)d\tau .$$

Aplicação as EDO's Lineares com coeficientes polinomiais.

$$PVI: \begin{cases} y'' + ty' - y = 0 , \; 0 < t < +\infty \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

OBS: $F(s) = \mathscr{L}[f](s) \Rightarrow \mathscr{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$. □

De modo que,

$$\mathscr{L}[ty'(t)](s) = -\frac{d}{ds}(sY(s) - y(0^+)) = -sY'(s) - Y(s) .$$

Aplicando $\mathscr{L}$ a ambos os lados da EDO obtem-se

$$(s^2Y(s) - sy(0^+) - y'(0^+)) - sY'(s) - Y(s) - Y(s) = 0$$

ou seja

$$Y'(s)+\left(\frac{2}{s}-s\right)Y(s)=-\frac{1}{s}.$$

Que é uma EDO Linear de 1ª ordem. De modo que,

$$\mu(t)=e^{\int(\frac{2}{s}-s)ds}=e^{2\ln s-\frac{s^2}{2}}=s^2e^{-\frac{s^2}{2}}\Rightarrow(\mu(s)Y(s))'=-se^{-\frac{s^2}{2}}\Rightarrow\mu(s)Y(s)=-\int se^{-\frac{s^2}{2}}ds+C$$

OBS: $\int se^{-\frac{s^2}{s}}ds=-\int e^{-\frac{s^2}{2}}d(-\frac{s^2}{2})=-e^{-\frac{s^2}{2}}$.□

Portanto,

$$Y(s)=\frac{1}{s^2}+C\frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}\ .$$

Entretanto, se quisermos $y\in\mathscr{E}$ então necessariamente $C=0$.

Conclusão: Aplicando $\mathscr{L}^{-1}$, obtem-se que a solução do PVI (em $\mathscr{E}$) é dada por

$$y(t)=t\ .$$

Exemplo:

$$PVI:\begin{cases}y''+ty'+y=0\\ I_0y=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{cases},0<t<\infty$$

Aplicando $\mathscr{L}$ a ambos os lados da EDO obtem-se

$$s^2Y(s)-sy(0^+)-y'(0^+)-sY'(s)-Y(s)+Y(s)=0$$

Ou seja

$$Y'(s)-sY(s)=-\frac{1}{s}\ .$$

Neste caso,

$$\mu(s)=e^{\int-sds}=e^{-s^2/2}\Rightarrow\left(\mu(s)Y(s)\right)'=-\frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s}\Rightarrow Y(s)=-e^{s^2/2}\int\frac{e^{-\tau^2/2}}{\tau}d\tau+Ce^{s^2/2}$$

Novamente, como queremos $y\in\mathscr{E}$, então necessariamente $C=0$.
De modo que,

$$Y(s)=-e^{s^2/2}\int^{s}\frac{e^{-\tau^2/2}}{\tau}d\tau.$$

Entretanto, se aplicarmos $\mathscr{L}^{-1}$ obteremos que

$$y(t) = -\mathscr{L}^{-1}\left[e^{s^2/2} \int^{s} \frac{e^{-\tau^2/2}}{\tau} d\tau \right](t) = ?$$

OBS: Não existe $f \in \mathscr{E}$ tal que $\mathscr{L}[f](s) = e^{s^2/2}$. De modo que, não se pode aplicar a convolução. □

Teorema: (Valor Inicial)

Hipótese: $f, f' \in \mathscr{E}$.

Tese: $\lim\limits_{s \to +\infty} s\mathscr{L}[f](s) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$.

Prova: $\mathscr{L}[f'](s) = s\mathscr{L}[f](s) - f(0^+)$ e $f' \in \mathscr{E} \Rightarrow \lim\limits_{s \to +\infty} \mathscr{L}[f'](s) = 0$. Portanto,

$$\lim_{s \to +\infty} s\mathscr{L}[f](s) = f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t).$$

Teorema: (Valor Final)

Hipótese: f, f' *seccionalmente contínuas e limitadas sobre* $[0, +\infty[$, *com* $|f'|$ *integrável em* $[0, +\infty[$.

Tese: $\lim\limits_{s \to 0^+} s\mathscr{L}[f](s) = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

Prova: $\mathscr{L}[f'](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt \Rightarrow \lim\limits_{s \to 0^+} \mathscr{L}[f'](s) = \lim\limits_{s \to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt$.

Pela convergência uniforme obtida pelo teste de Weierstrass, uma vez que

$$\left|e^{-st} f'(t)\right| \leq |f'(t)|, \forall t > 0 \text{ e } \int_0^{+\infty} |f'(t)|dt < +\infty,$$

temos que

$$\lim_{s \to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt = \int_0^{+\infty} \lim_{s \to 0^+} e^{-st} f'(t)dt.$$

De modo que,

$$\lim_{s \to 0^+} \mathscr{L}[f'](s) = \int_0^{+\infty} f'(t)dt = \lim_{T \to +\infty} \int_0^{T} f'(t)dt = \lim_{T \to +\infty} \left[f(T) - f(0^+)\right].$$

Portanto,

$$\lim_{s \to 0^+} \left(s\mathscr{L}[f](s) - f(0^+)\right) = \lim_{s \to 0^+} \mathscr{L}[f'](s) = \lim_{t \to +\infty} \left(f(t) - f(0^+)\right).$$

Exemplo: A segunda função especial que nós obteremos será a ***função de Bessel de 1ª espécie e ordem zero***, $J_0(t)$, dada pela solução do seguinte

$$PVI:\begin{cases} ty''+y'+ty=0 \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$$

Aplicando Laplace à EDO obtemos

$$-\frac{d}{ds}[s^2\mathscr{L}[y](s)-sy(0^+)-y'(0^+)]+(s\mathscr{L}[y](s)-y(0^+))-\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y](s)=0$$

Ou seja

$$-\frac{d}{ds}[s^2\mathscr{L}[y](s)-s]+s\mathscr{L}[y](s)-1-\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y](s)=0$$

Ou seja

$$(s^2+1)\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y](s)+s\mathscr{L}[y](s)=0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\mathscr{L}[y](s)+\frac{s}{s^2+1}\mathscr{L}[y](s)=0$$

A qual é uma EDO linear de 1ª ordem com fator integrante

$$\mu(s)=e^{\int\frac{s}{s^2+1}ds}=e^{\ln(s^2+1)^{1/2}}=(s^2+1)^{1/2}.$$

De modo que,

$$\mathscr{L}[y](s)=\frac{C}{\sqrt{s^2+1}}=\frac{C}{s}(1+\frac{1}{s^2})^{-1/2}.$$

OBS:

$$\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}=\sqrt{\frac{1}{s^2(1+\frac{1}{s^2})}}=\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}}=\frac{1}{s}(1+\frac{1}{s^2})^{-1/2}$$

OBS: Série de Taylor de $f(x)=(1+x)^r$ numa vizinhança de $x_0=0, \forall r\in\mathbb{R}$:

$$(1+x)^r=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3+\ldots.$$

De modo que,

$$\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}=\frac{1}{s}\left(1+(-\tfrac{1}{2})s^{-2}+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}s^{-4}+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}s^{-6}+\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{s}\left(1-\tfrac{1}{2}s^{-2}+\tfrac{3}{2^2 2!}s^{-4}-\tfrac{3.5}{2^3 3!}s^{-6}+\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{s}\left(1-\tfrac{1}{2}s^{-2}+\tfrac{2.3.4}{2.2^2 2!.2^2}s^{-4}-\tfrac{2.3.4.5.6}{2.2^3 3!2^2.2.3}s^{-6}+\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{s}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k!)}{(2^k k!)^2}\frac{1}{s^{2k}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k!)}{(2^k k!)^2}\frac{1}{s^{2k+1}}$$

Teorema: *Hipótese:* $F(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\frac{1}{s^{k+1}}$, *absolutamente convergente* $\forall s>\alpha\geq 0$.

Tese:

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)](t)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\frac{t^k}{k!}, \quad \forall t\geq 0.$$

Além disso, f é contínua e de ordem exponencial $\alpha_1, \forall\alpha_1>\alpha$.

Sendo assim, então

$$\mathscr{L}[y](s)=C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{(2^k k!)^2}\frac{1}{s^{2k+1}}$$

Procedendo formalmente e aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos

$$y(t)=C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{(2^k k!)^2}\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^{2k+1}}](t)=C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{(2^k k!)^2}\frac{t^{2k}}{(2k)!}=C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2^k k!)^2}t^{2k}$$

Agora, impondo a condição inicial $y(0)=1$, conclui-se que

$$\boxed{J_0(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2^k k!)^2}t^{2k}}$$

Generalização: A ***equação de Bessel de 1ª espécie e de ordem n*** é dada por

$$\boxed{t^2y''+ty'+(t^2-n^2)y=0}\ .$$

Possui como uma das soluções a ***função de Bessel de 1ª espécie e ordem n*** dada por

$$\boxed{J_n(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!((n+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k},t>0.}$$

Aplicação ao cálculo de integrais parametrizadas.

Exemplo: ***Função Gama de Euler*** (fatorial generalizado):

O fatorial de um número inteiro positivo é por definição dado por

$$n!=1.2.3.\ldots.(n-1).n$$

De modo que a função fatorial satisfaz a seguinte equação funcional

$$n!=n(n-1)!\,.$$

Assim, para $n=1$ obtemos que

$$1=1!=1.0!=0!\,.$$

Se fizermos $n=0$ obteremos que

$$(-1)!=\lim_{n\to 0}\frac{n!}{n}=\frac{0!}{0^{\pm}}=\frac{1}{0^{\pm}}=\pm\infty\,.$$

Mas então quando $n=-1$ obteremos que

$$(-1)!=(-1)(-2)!\Rightarrow\mp\infty=(-2)!\,.$$

Analogamente, quando $n=-2$ obteremos que

$$(-2)!=(-2)(-3)!\Rightarrow\mp\infty=(-3)!\,.$$

E assim sucessivamente. Ou seja, o fatorial de qualquer inteiro negativo será infinito!
Por outro lado, se $n\geq 0$ sabemos que

$$\mathscr{L}[t^n](s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}t^n dt=\frac{n!}{s^{n+1}}\ ,\forall s>0\,.$$

De modo que,

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = \mathscr{L}[t^n](1) = n!\,.$$

Esse fato levou Euler a definir a seguinte generalização da função fatorial

Definição: A ***Função Gama*** (ou fatorial generalizado), denotada por $\Gamma(x)$, é dada por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt \quad ,\forall x > 0\,.$$

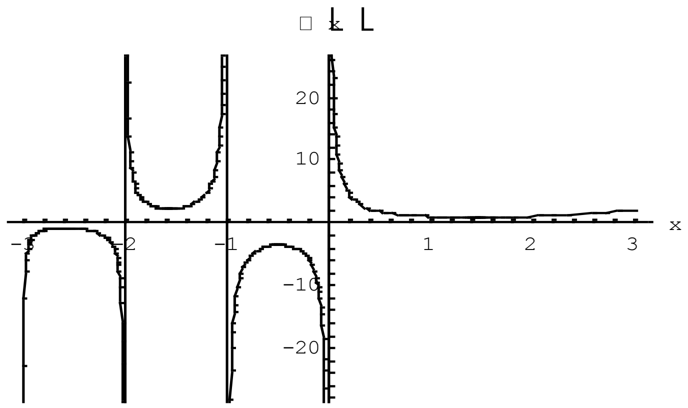
Propriedades

(P1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\, x > 0.$

(P2) $\Gamma(1) = 1\,.$

(P3) $\Gamma(n+1) = n!\,,\forall n \geq 1\,.$

Gráfico:



Com a função Gama podemos obter

$$\mathscr{L}[t^r](s) \quad ,\forall r > -1.$$

Isso permite generalizar a noção de derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$ para ordem fracionária!

OBS:

$$\mathscr{L}[t^r f(t)](s) = (-1)^{[r]} \frac{d^r}{ds^r} \mathscr{L}[f](s) \quad ,\forall r \in \mathbb{R}, r > -1.$$

Teorema: *Dado* $r \in \mathbb{R}$ *, r>-1, tem-se que*

$$\mathscr{L}[t^r](s) = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}} = \frac{(r+1)!}{s^{r+1}} \quad ,\forall s > 0\,.$$

Prova:

$$\mathscr{L}[t^r](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^r\,dt = \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\tfrac{u}{s}\right)^r d\left(\tfrac{u}{s}\right) = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}} \quad .$$

Exemplo: Um exemplo de integral não trivial que todo estudante de Cálculo I conhece é o seguinte

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\,.$$

Através da transformada de Laplace podemos calcular tal integral. De fato, definindo a seguinte função (família parametrizada de integrais impróprias)

$$f(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx^2}\, dx$$

Tem-se que,

$$\mathscr{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dxdt = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(s+x^2)t} dxdt = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(s+x^2)t} dtdx =$$

$$= \int_0^{\infty} \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-(s+x^2)t} dtdx = \int_0^{\infty} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{e^{-(s+x^2)t}}{-(s+x^2)} \right]_0^T dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{s+x^2} =$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left[1+(x/\sqrt{s})^2\right]} = \frac{1}{\sqrt{s}} \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{d(x/\sqrt{s})}{\left[1+(x/\sqrt{s})^2\right]} = \frac{1}{\sqrt{s}}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{s}} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{s}}$$

De modo que,

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[\frac{\pi}{2\sqrt{s}}](t) = \frac{\pi}{2}\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}}](t)\,.$$

OBS: Pelo teorema anterior,

$$\mathscr{L}[t^{-1/2}](s) = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}\,.\square$$

Pelo exercício da lista, sabemos que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, o que implica em

$$f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} t^{-1/2}.$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = f(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

OBS: Solução apresentada por Laplace:

$$\mathscr{L}[f](1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\left(\int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx\right)dt = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)t} dxdt = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)t} dtdx$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-(1+x^2)t}}{-(1+x^2)} \right]_0^{\infty} dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = (arctgx]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Por outro lado,

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2 t} dx\right)dt = \int_0^{\infty} e^{-t}\left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} t^{-1/2} du\right)dt$$

OBS: $u^2 := x^2 t \Rightarrow x = u/\sqrt{t} \Rightarrow dx = t^{-1/2}du$.

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2 t} dx\right)dt = \left(\int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du\right)$$

OBS: $v := t^{1/2} \Rightarrow t = v^2 \Rightarrow dt = 2vdv \Rightarrow t^{-1/2}dt = 2dv$.

$$\int_0^\infty e^{-t}\left(\int_0^\infty e^{-x^2 t}dx\right)dt = \left(\int_0^\infty 2e^{-v^2}dv\right)\left(\int_0^\infty e^{-u^2}du\right)$$
$$= 2\left(\int_0^\infty e^{-u^2}du\right)^2$$

De modo que,

$$\frac{\pi}{2} = \mathscr{L}[f](1) = 2\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \square$$

Exemplo: Avaliar a família de integrais

$$h(t) = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx \ , a>0, t\ge 0. \quad (1)$$

Aplicando a transformada de laplace à (1), obtem-se que

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+a^2}dxdt \quad (2)$$

OBS: Tem-se que

$$h(t) = \int_0^\infty f(x,t)dx$$

onde $|f(x,t)| \le \dfrac{1}{x^2+a^2} = M(x)$ com $\int_0^\infty M(x)dx = \dfrac{\pi}{2a} < +\infty$. De modo que, pelo Teste M de Weierstrass h é uniformemente convergente, portanto pode-se trocar a ordem de integração em (2) e obter-se que

$$H(s) = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\int_0^\infty e^{-st}\cos tx\, dtdx$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\left(\frac{s}{s^2+x^2}\right)dx$$

Usando frações parciais

$$\frac{1}{(x^2+a^2)(s^2+x^2)} = \frac{A}{x^2+a^2} + \frac{B}{s^2+x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/(s^2-a^2) \\ B = -1/(s^2-a^2) \end{cases} \square$$

De modo que,

$$H(s) = \frac{s}{(s^2-a^2)}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+s^2}\right)dx = \frac{s}{(s^2-a^2)}\left(\frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2s}\right) = \frac{\pi}{2a}\frac{1}{(s+a)}.$$

Sendo assim,

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}[H](t) = \frac{\pi}{2a}\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s+a}](t) = \frac{\pi}{2a}e^{-at}.$$

Portanto,

$$\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-at} \ ,a>0,t\geq 0.$$

Aplicação às soluções fundamentais de equações diferenciais parciais.

Modelo Matemático para difusão do calor unidimensional (um fio semi-infinito de material homogêneo) com temperatura inicial (t = 0) igual a zero, com a extremidade (x = 0) mantida à temperatura constante $u_0 > 0$. O ***Problema de Valor Inicial e de Fronteira*** (PVIF) é dado por

$$(PVIF): \begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & ,x>0,t>0 \\ u(x,0)=0 & ,x>0 \\ u(0,t)=u_0 & ,t>0 \end{cases}$$

Onde $k^2 = K/c\rho$ é o coeficiente de difusividade, sendo K a condutividade térmica, c o calor específico do material do fio e ρ a densidade do fio. Como não existem no mundo real temperaturas infinitas, impõe-se a seguinte condição de limitação sobre a temperatura

$$|u(x,t)| \leq M, \forall x>0, \forall t>0. \quad (1)$$

Como a temperatura está definida, em cada variável, em domínios semi-infinitos, pode-se aplicar a transformada de Laplace tanto em relação ao espaço (variável x) quanto em relação ao tempo (variável t). Apliquemos em relação à variável t. Com isso obtemos que

$$\mathscr{L}[u_t](x,s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)dt = s\mathscr{L}[u](x,s) - u(x,0) = sU(x,s).$$

$$\mathscr{L}[k^2 u_{xx}](x,s) = k^2\int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)dt = k^2\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt = k^2\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)$$

De modo que, obtemos a seguinte EDO

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) - \frac{s}{k^2}U(x,s) = 0. \quad (2)$$

OBS: Na verdade trata-se de uma família de EDO's parametrizadas pelo parâmetro real s. □

Pela teoria das EDO's, para obtermos uma solução única de uma EDO de 2ª ordem precisamos impor <u>duas</u> condições iniciais. Entretanto, só temos uma condição inicial na variável x! Realmente, a condição de fronteira é transformada em uma condição inicial para a função transformada $U(x,s)$, uma vez que

$$U(0,s) = \mathscr{L}[u(0,t)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(0,t)dt = \int_0^{\infty} e^{-st} u_0 dt = u_0 \mathscr{L}[1](s) = \frac{u_0}{s}.$$

A solução geral da EDO (2) é dada por

$$U(x,s) = C_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{k}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}.$$

Aqui é que será fundamental termos imposto a condição (1). Isso suprirá a falta de uma segunda condição inicial. De fato, de (1) obtem-se que

$$|U(x,s)| = \left|\int_0^{\infty} e^{-st} u(x,t)dt\right| \le \int_0^{\infty} e^{-st} |u(x,t)|dt \le M \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{M}{s} \ , \forall s > 0.$$

De modo que, necessariamente $\lim_{s \to +\infty} U(x,s) = 0$.

Portanto,

$$U(x,s) = C_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}.$$

Agora sim podemos impor nossa única condição inicial sobre a solução geral para obtermos uma solução única. Fazendo isso, obtemos que

$$\frac{u_0}{s} = U(0,s) = C_2.$$

Portanto, a única solução do problema misto

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}U(x,s) - \dfrac{s}{k^2}U(x,s) = 0, x > 0 \\ U(0,s) = u_0 / s \\ |U(x,s)| \le \widetilde{M} \end{cases}$$

É

$$U(x,s) = \frac{u_0}{s} e^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}.$$

Então, a solução do (PVIF) será dada por

$$u(x,t) = \mathscr{L}^{-1}[U(x,s)](x,t) = u_0 \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\sqrt{s}\frac{x}{k}}}{s}\right](x,t). \qquad (3)$$

Para obtermos essa transformada inversa precisaremos de alguns resultados.

Proposição:

(a) $$\mathscr{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right](s)=\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \quad ,\alpha\geq 0.$$

(b) $$\mathscr{L}\left[\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right](s)=e^{-\alpha\sqrt{s}} \quad ,\alpha>0.$$

Prova: Estratégia: transformar em um sistema de EDO's. Definindo as variáveis

$$Y_\alpha(s)=\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}},\alpha\geq 0,s>0 \quad \text{e} \quad Z_\alpha(s)=e^{-\alpha\sqrt{s}},\alpha>0,s>0.$$

Tem-se que

$$(sY_\alpha(s))'=-\tfrac{\alpha}{2}Z_\alpha(s)+\tfrac{1}{2}Y_\alpha(s) \quad \text{e} \quad Z_\alpha'(s)=-\tfrac{\alpha}{2}Y_\alpha(s).$$

OBS: De fato,

$$(sY_\alpha(s))'=sY_\alpha'(s)+Y_\alpha(s)=s\left[(\frac{1}{\sqrt{s}})'e^{-\alpha\sqrt{s}}+\frac{1}{\sqrt{s}}(e^{-\alpha\sqrt{s}})'\right]+\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

$$=s\left[(-\tfrac{1}{2}s^{-3/2})e^{-\alpha\sqrt{s}}+\frac{1}{\sqrt{s}}(-\alpha\sqrt{s})'e^{-\alpha\sqrt{s}}\right]+\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

$$=s\left[-\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{2\sqrt{s^3}}+\frac{1}{\sqrt{s}}(-\tfrac{\alpha}{2}s^{-1/2})e^{-\alpha\sqrt{s}}\right]+\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

$$=-\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}}-\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha\sqrt{s}}+\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}=\tfrac{1}{2}Y_\alpha(s)-\tfrac{\alpha}{2}Z_\alpha(s)$$

□

De modo que, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} sY_\alpha'(s)+\frac{1}{2}Y_\alpha(s)+\frac{\alpha}{2}Z_\alpha(s)=0 \\ Z_\alpha'(s)+\frac{\alpha}{2}Y_\alpha(s)=0 \end{cases}$$

Aplicando $\mathscr{L}^{-1}$, somos levados ao sistema

$$\begin{cases} -(ty_\alpha(t))'+\frac{1}{2}y_\alpha(t)+\frac{\alpha}{2}z_\alpha(t)=0 \\ -tz_\alpha(t)+\frac{\alpha}{2}y_\alpha(t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -ty_\alpha'-\frac{1}{2}y_\alpha+\frac{\alpha}{2}z_\alpha=0 \\ z_\alpha=\frac{\alpha}{2t}y_\alpha \end{cases} \Rightarrow y_\alpha'+(\tfrac{1}{2t}-\tfrac{\alpha^2}{4t^2})y_\alpha=0$$

OBS:

$$\mathscr{L}[ty_\alpha](s)=-Y_\alpha'(s) \Rightarrow s\mathscr{L}[ty_\alpha](s)=-sY_\alpha'(s)$$

$$\mathscr{L}[(ty_\alpha)'](s)=s\mathscr{L}[ty_\alpha](s)-0.y_\alpha(0)=-sY_\alpha'(s)$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}[sY_\alpha'(s)](s)=-(ty_\alpha(t))'$$

□

A qual é uma EDO linear de 1ª ordem, cujo fator integrante é dado por

$$\mu(t) = e^{\frac{1}{2}\int(\frac{1}{2t}-\frac{\alpha^2}{4t^2})dt} = \sqrt{t}e^{\frac{\alpha^2}{4t}}.$$

Portanto, obtem-se que

$$y_\alpha(t) = \frac{C}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \qquad \text{e} \qquad z_\alpha(t) = C\frac{\alpha}{2\sqrt{t^3}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}.$$

Se $\alpha = 0$, então

$$Y_0(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Rightarrow y_0(t) = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}}](t) = \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}, t > 0.$$

Logo, para $\alpha = 0$ e $t = 1$, temos que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = y_0(1) = C.$$

Resumindo, obteve-se que

$$y_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}, \alpha \geq 0, t > 0 \quad \text{e} \quad z_\alpha(t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}, \alpha > 0, t > 0.$$

OBS: Esta demonstração está correta desde que a constante C seja independente de α. □

Uma demonstração direta de (a) e (b) pode ser dada da seguinte forma. Primeiro provamos (a) para $\alpha = 1$ e depois utilizamos o 1º Teorema de Translação. De fato, como

$$y_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-1/4t}, t > 0, y_1(0) = 0,$$

é contínua $\forall t \geq 0$ e limitada , então $\forall s > 0$

$$\sqrt{\pi}Y_1(s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{e^{-1/4t}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^\infty e^{-(s+\frac{1}{4t^2})t}\frac{dt}{\sqrt{t}} = e^{-\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-(\sqrt{st}-\frac{1}{2\sqrt{t}})^2}d(2\sqrt{t})$$

fazendo a mudança $\tau = 2\sqrt{t}$ obtem-se que

$$\text{(c)} \qquad \sqrt{\pi}e^{\sqrt{s}}Y_1(t) = \int_0^\infty e^{-(\frac{\sqrt{s}}{2}\tau-\frac{1}{\tau})^2}d\tau.$$

fazendo a mudança $\lambda = \frac{\sqrt{s}}{2}\tau$ obtem-se que

$$\text{(d)} \qquad \sqrt{\pi}e^{\sqrt{s}}Y_1(s) = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-(\frac{1}{\lambda}-\lambda\frac{\sqrt{s}}{2})^2}\frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Somando (c) e (d) obtem-se que

$$2\sqrt{\pi}e^{\sqrt{s}}Y_1(s) = \int_0^\infty e^{-(\frac{\sqrt{s}}{2}\tau-\frac{1}{\tau})^2}d\tau + \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-(\frac{1}{\lambda}-\lambda\frac{\sqrt{s}}{2})^2}\frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Finalmente fazendo $\tau = \lambda$ na primeira integral obtem-se que

$$2\sqrt{\pi}e^{\sqrt{s}}Y_1(s) = \int_0^\infty e^{-(\frac{\sqrt{s}}{2}\lambda - \frac{1}{\lambda})^2}(1 + \frac{2}{\lambda^2\sqrt{s}})d\lambda = \int_0^\infty e^{-(\frac{\sqrt{s}}{2}\lambda - \frac{1}{\lambda})^2}\frac{2}{\sqrt{s}}(\frac{\sqrt{s}}{2} + \frac{1}{\lambda^2})d\lambda$$

$$= \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-(\frac{\sqrt{s}}{2}\lambda - \frac{1}{\lambda})^2}(\frac{\sqrt{s}}{2} + \frac{1}{\lambda^2})d\lambda = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-(\frac{\sqrt{s}}{2}\lambda - \frac{1}{\lambda})^2}d(\frac{\sqrt{s}}{2}\lambda - \frac{1}{\lambda})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

De modo que,

$$Y_1(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

ou seja,

$$\mathscr{L}[\frac{e^{-1/4t}}{\sqrt{\pi t}}](s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}.$$

Para obtermos (a) para $\alpha > 0, \alpha \neq 1$, basta utilizar o seguinte resultado

1º Teorema da Translação:
Hipótese: $\mathscr{L}[f](s) = F(s), \textit{para } s > \beta.$
Tese:

$$F(cs) = \frac{1}{c}\mathscr{L}[f(\frac{t}{c})](s) \ , \forall s > \frac{\beta}{c}, \forall c > 0.$$

Assim $\forall \alpha > 0$,

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\alpha\sqrt{s}} = Y_1(\alpha^2 s) = \frac{1}{\alpha^2}\mathscr{L}[y_1(\frac{t}{\alpha^2})](s) = \frac{1}{\alpha^2}\mathscr{L}[\frac{e^{-\alpha^2/4t}}{\sqrt{\pi t/\alpha^2}}](s),$$

ou seja,

$$\mathscr{L}[\frac{e^{-\alpha^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}](s) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \ , \forall s > 0, \forall \alpha \geq 0.$$

Para provar (b), observamos que a função

$$z(t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\alpha^2/4t}, t > 0, z(0) = 0,$$

é contínua e limitada $\forall t \geq 0$. Além disso,

$$z(t) = \frac{\alpha}{2t}y_\alpha(t) \ .$$

Aplicando o seguinte resultado

Teorema: *Hipótese:* $f \in \mathscr{E}, \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t} < +\infty.$

Tese: $$\mathscr{L}[\frac{f(t)}{t}](s) = \int_s^\infty \mathscr{L}[f](\xi)d\xi, \forall s > \alpha_f.$$

Prova: Observando que

$$F(\xi)=\int_0^\infty e^{-\xi\, t} f(t)dt$$

satisfaz as condições do teorema de Weierstrass $\forall \xi \geq \alpha_f$, obtem-se que se $r>s>\alpha_f$ então

$$\int_s^r F(\xi)d\xi=\int_s^r\int_0^\infty e^{-\xi\, t} f(t)dtd\xi=\int_0^\infty f(t)\int_s^r e^{-\xi\, t}d\xi dt=\int_0^\infty f(t)\left(\left[\frac{e^{-\xi\, t}}{-t}\right]_s^r\right)dt$$

$$=\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-st}dt-\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-rt}dt.$$

OBS: $f\in\mathscr{E},\ \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}<+\infty \Rightarrow \frac{f(t)}{t}\in\mathscr{E}$. De modo que, $\lim\limits_{s\to\infty}\mathscr{L}[\frac{f(t)}{t}](s)=0$.□

Portanto, fazendo $r\to+\infty$, obtem-se que

$$\int_s^\infty F(\xi)d\xi=\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-st}dt=\mathscr{L}[\frac{f(t)}{t}](s).$$

Conclui-se então que

$$\mathscr{L}[z](s)=\mathscr{L}[\tfrac{\alpha}{2t}y](s)=\tfrac{\alpha}{2}\mathscr{L}[\frac{y}{t}](s)=\tfrac{\alpha}{2}\int_s^\infty Y(\xi)d\xi=\tfrac{\alpha}{2}\int_s^\infty \frac{e^{-\alpha\sqrt{\xi}}}{\sqrt{\xi}}d\xi=\int_s^\infty e^{-\alpha\sqrt{\xi}}d(\alpha\sqrt{\xi})$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\left[-e^{-\alpha\sqrt{\xi}}\right]_s^b\right)=\lim_{b\to\infty}(e^{-\alpha\sqrt{s}}-e^{-\alpha\sqrt{b}})=e^{-\alpha\sqrt{s}}.$$

ou seja,

$$\mathscr{L}[\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi\ t^3}}e^{-\alpha^2/4t}](s)=e^{-\alpha\sqrt{s}},\alpha>0,s>0.$$

Agora já temos quase tudo que precisamos para obter a solução do PVIF dada pela transformada inversa (3). Entretanto, ainda necessitamos definir duas funções especiais muito importantes na Física-Matemática; as funções ***erro*** e ***erro complementar***. Como motivação, lembramos que

$$\mathscr{L}[t^r](s)=\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}\quad ,\forall r>-1.$$

Por outro lado,

$$(f*g)(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)G(s)](t).$$

Particularmente, temos que

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}}\cdot\frac{1}{s-1}](t)=\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}*e^t=\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{(t-\tau)}d\tau=\frac{e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}}d\tau \overset{(r=\sqrt{\tau})}{=}$$

$$=\frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-r^2}dr$$

Definição: A função especial ***erro*** (***probability integral***) é dada por

$$erf(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-r^2}\, dr \quad , \forall t \geq 0.$$

De modo que,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{s-1}](t) = e^t erf(\sqrt{t}).$$

Por outro lado, pelo 1º teorema da translação, temos que

$$\mathscr{L}[e^{-at} f(t)](s) = F(s+a), \forall a \in \mathbb{R}.$$

Com isso obtemos que

$$\mathscr{L}[erf(\sqrt{t})](s) = \frac{1}{s\sqrt{s+1}} \quad , \forall s > 0.$$

Lembrando também que

$$\mathscr{L}[\int_a^t f(x)dx](s) = \frac{1}{s}\mathscr{L}[f](s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(t)dt \quad , \forall a \geq 0,$$

obtemos que

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} = \frac{Z(s)}{s} = \mathscr{L}[\int_0^t z(x)dx](s) = \mathscr{L}[\int_0^t \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\alpha^2/4x}}{x^{3/2}} dx](s)$$

$$= \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \mathscr{L}[\int_0^t \frac{e^{-\alpha^2/4x}}{x^{3/2}} dx](s)$$

fazendo a mudança $\lambda^2 = \alpha^2/4x$, obtemos que

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s}](t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \int_{+\infty}^{\alpha/2\sqrt{t}} e^{-\lambda^2} (-\frac{4}{\alpha} d\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha/2\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

Assim somos levados a seguinte

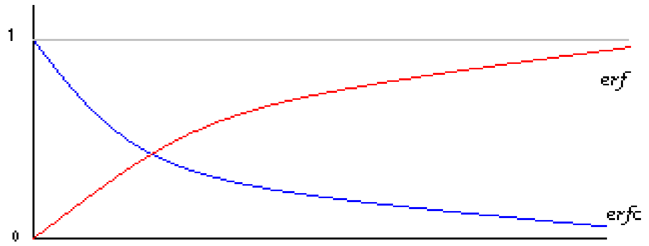
Definição: A função especial ***erro complementar*** é definida como sendo

$$erfc(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{+\infty} e^{-r^2}\, dr \quad , \forall t \geq 0.$$

Propriedade:

$$erf(t) + erfc(t) = 1 \quad , \forall t \geq 0.$$

Gráfico:



De modo que,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s}](t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,dr - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha/2\sqrt{t}} e^{-r^2}\,dr = 1 - erf\,(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}})$$

ou seja,

$$\mathscr{L}[erfc(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}})](s) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \quad ,\forall \alpha \geq 0, \forall s > 0.$$

Conclusão: A solução do PVIF é dada por

$$u(x,t) = \mathscr{L}^{-1}[U(x,s)](x,t) = u_0\mathscr{L}^{-1}[\frac{e^{-\sqrt{s}\frac{x}{k}}}{s}](x,t) = u_0 erfc(\frac{x}{2k\sqrt{t}})\ .$$

Aplicação a Sistemas de Controle automático (Servomecanismos)

Objetivo: Controlar a rotação de uma haste (shaft) através de um ponteiro (controle).

Notação:

$\theta_o(t) =$ ângulo de giro da haste. (***output***)

$\theta_i(t) =$ ângulo de giro do ponteiro. (***input***)

Hipótese: A haste possui um momento de inércia $I >>$ momento de inércia do ponteiro.

Definição: $\Phi(t) = \measuredangle(haste, ponteiro) = \theta_o(t) - \theta_i(t)$. (1)

Procedimento: Um sistema auxiliar (servomecanismo) é projetado para medir $\Phi(t)$ e retroalimentar a haste através de um torque que seja proporcional ao desvio $\Phi(t)$. Além disso, para produzir um "damping" no sistema o servomecanismo também produzirá um torque proporcional à variação do desvio $\Phi'(t)$.

OBS: O servomecanismo pode conter sua própria fonte de energia através de motor, gerador ou equipamento elétrico. □

Modelo matemático: O modelo matemático é conseqüência da seguinte lei da Física: *"O produto de I pela aceleração angular é igual ao torque aplicado a haste"*, ou seja, expressando matematicamente obtem-se

$$I\theta_o''(t) = -k\Phi(t) - c\Phi(t) \qquad (2)$$

OBS: Se utilizarmos (1) perceberemos que a EDO que está "por detrás" é

$$I\theta_o''(t) = -k(\theta_o(t) - \theta_i(t)) - c(\theta_o(t) - \theta_i(t))' = -k\theta_o(t) - c\theta_o'(t) + k\theta_i(t) + c\theta_i'(t)$$

ou seja,

$$I\theta_o''(t)+c\theta_o'(t)+k\theta_o(t)=k\theta_i(t)+c\theta_i'(t)$$

Ou seja, é uma EDO de 2ª ordem linear a coeficientes constantes, portanto do tipo

$$ay''(t)+by'(t)+cy(t)=f(t).\square$$

Hipóteses adicionais: $k,c>0,\theta_i,\theta_i'$ contínuas em $[0,+\infty[$.
Condições iniciais: Como a haste está inicialmente em repouso, então

$$\theta_o(0)=\theta_o'(0)=0. \qquad (3)$$

Conclusão: O modelo matemático é dado pelo seguinte

$$PVI:\begin{cases} I\theta_o''=-k\Phi-c\Phi',t>0\\ \theta_o(0)=\theta_o'(0)=0\end{cases}$$

Aplicando Laplace na equação (2), obtem-se

$$Is^2\theta_o(s)=-(k+sc)\Phi(s)-c\theta_i(0). \qquad (3)$$

OBS: $\Phi(0)=-\theta_i(0)\,\square$
Por outro lado, aplicando Laplace em (1), obtem-se

$$\Phi(s)=\theta_o(s)-\theta_i(s). \qquad (4)$$

De (3) e (4), segue-se

$$Is^2(\Phi(s)+\theta_i(s))=-(k+sc)\Phi(s)-c\theta_i(0)$$

Donde

$$\Phi(s)=-\frac{(Is^2\theta_i(s)+c\theta_i(0))}{Is^2+cs+k}.$$

Portanto, o desvio da haste será dado por

$$\Phi(t)=-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(Is^2\theta_i(s)+c\theta_i(0))}{Is^2+cs+k}\right](t).$$

Em particular, se $\theta_i(t)=at$, obtem-se que

$$\Phi(s)=\frac{-aI}{Is^2+cs+k}=\frac{-a}{s^2+\frac{c}{I}s+\frac{k}{I}}=\frac{-a\omega}{(s+b)^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{\omega}$$

onde $b=\dfrac{c}{2I},\omega^2=\dfrac{k}{I}-\dfrac{c^2}{4I^2}$.
De modo que,

$$\Phi(t)=-\frac{a}{\omega}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+b)^2+\omega^2}\right](t)=-\frac{a}{\omega}e^{-bt}sen\,\omega t.$$

OBS: Supôs-se $\frac{k}{I} > \frac{c^2}{4I^2}$. Neste caso, $\Phi(t)$ é uma oscilação subcrítica (um "damping").

Fórmula Complexa de Inversão

Se possuirmos o ferramental matemático necessário para obtermos a inversão efetiva da transformada de Laplace a inversão será obtida através da ***Fórmula Integral de Mellin***.

Definição: Se $F(s) = \mathscr{L}[f](s)$, então

$$\boxed{f(t) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zt}F(z)dz \quad ,\forall t > 0} \qquad \text{(FI)}$$

OBS: Tem-se que

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\,.$$

"Complexificando" a variável independente, ou seja, fazendo $s = z = x+iy$, obtem-se que

$$\begin{aligned}F(z) &= \int_0^\infty e^{-(x+iy)t} f(t)dt = \int_0^\infty (e^{-xt}\cos yt - ie^{-xt}\operatorname{sen} yt) f(t)dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\cos yt dt - i\int_0^\infty f(t)e^{-xt}\operatorname{sen} yt dt \\ &= u(x,y) + iv(x,y)\end{aligned}$$

Como f E então $\exists C > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq.

$$\left|f(t)\right| \le Ce^{\alpha t}, \forall t > 0 \Rightarrow \begin{cases}\left|\int_0^\infty f(t)e^{-xt}\cos ytdt\right| \\ \left|\int_0^\infty f(t)e^{-xt}\operatorname{sen} ytdt\right|\end{cases} \le C\int_0^\infty e^{-(x-\alpha)t}dt \le \frac{C}{x-\alpha}\ ,\forall x > \alpha.$$

Logo, u e v estão bem definidos na faixa $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) > \alpha$. Por outro lado, usando Leibniz

$$u_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty f(t)e^{-xt}\cos ytdt = \int_0^\infty -tf(t)e^{-xt}\cos ytdt$$

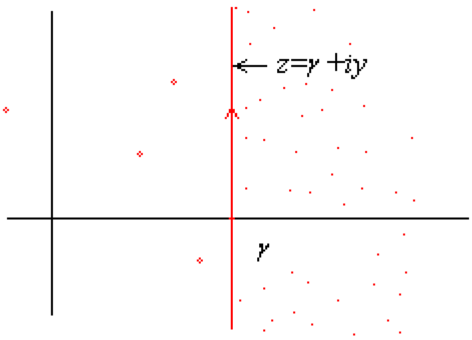
$$u_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty f(t)e^{-xt}\cos ytdt = \int_0^\infty -tf(t)e^{-xt}\operatorname{sen} ytdt$$

$$v_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty f(t)e^{-xt}\operatorname{sen} ytdt = \int_0^\infty -tf(t)e^{-xt}\operatorname{sen} ytdt$$

$$v_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\int_0^\infty f(t)e^{-xt}\operatorname{sen} ytdt\right) = -\int_0^\infty tf(t)e^{-xt}\cos ytdt$$

De modo que, u e v são contínuas em $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ e satisfazem as equações de ***Cauchy-Riemann***. Portanto, $F(z)$ é analítica em $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) > \alpha$. □

(FI) é o método direto para obtenção de $\mathscr{L}^{-1}[F(z)](t)$. A integração é efetuada ao longo da reta $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) = \gamma$, onde γ é tal que as singularidades de $F(z)$ estão à esquerda de $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) = \gamma$.



Origem da Fórmula (FI): Trata-se de uma generalização da Fórmula Integral de Cauchy para retas $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) = \gamma$ no caso em elas são a fronteira do semi-plano aonde $f(z)$ é analítica. Para isso necessitaremos ter alguma informação sobre o comportamento de $f(z)$ para $|z|$ arbitrariamente grande.

Definição: $f(z)$ é de ordem z^k quando $|z| \to \infty$, se $\exists M, r_0 > 0$ tais que;

$$|f(z)| < M|z|^k \quad, se \ |z| > r_0.$$

Notação: $f(z) = O(z^k)$.

Teorema: (*Integral Imprópria de Cauchy*)

Hip: $f(z)$ analítica sobre o semi-plano $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) \geq \gamma$ e $f(z) = O(z^{-k}), k > 0$.

Tese: Se $\mathbb{R}\mathrm{e}(z_0) > \gamma$, então

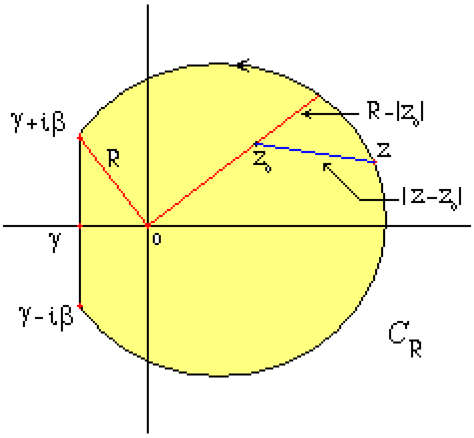
$$f(z_0) = -\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = -\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\gamma+iy)}{(\gamma+iy-z_0)}dy$$

De modo que, se $F(z)$ é analítica em $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) \geq \gamma$, $F(z) = O(z^{-k}), k > 0, |z| >> 1$, tem-se que

$$F(\omega) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(z)}{(\omega-z)}dz \qquad ,\forall \omega\in\mathbb{C}, \mathbb{R}e(\omega) > \gamma.$$

Prova:

Seja C_R o arco: $x \geq \gamma$ do círculo $|z| = R$ onde $R > |\gamma|$ e $R > |z_0|$. De modo que $z_0 \in \mathrm{int}(C_R \cup \{x=\gamma\})$. Definindo $\beta = \sqrt{R^2-\gamma^2}$ tem-se, pela Fórmula Integral de Cauchy, que



$$f(z_0)=\tfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_R\cup\{x=\gamma\}}\frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz=\tfrac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz+\int_{\gamma+i\beta}^{\gamma-i\beta}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz\right)=\tfrac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz-\int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz\right)$$

Quando $z\in C_R$ tem-se que; $|z-z_0|\geq R-|z_0|$ e como $|f(z)|<M|z|^{-k}$,então se $|z|=R$, R suficientemente grande (R >> 1), obtem-se que

$$\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|\leq\frac{M}{|z|^k}\frac{1}{|z-z_0|}\leq\frac{M}{R^k}\frac{1}{(R-|z_0|)}$$,se $R > r_0$,p/algum r_0 >> 1.

Os integrandos em $f(z_0)$ na expressão acima são contínuos. O comprimento de C_R é menor que $2\pi R$. Portanto, como

$$\left|\oint_C f(z)dz\right|\leq\oint_C|f(z)||dz|\leq ML\Rightarrow\left|\oint_{C_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz\right|\leq\frac{M}{R^k(R-|z_0|)}2\pi R=\frac{2\pi M}{R^k(1-|z_0|/R)}\to 0$$

Quando $R\to+\infty$, pois k > 0. Além disso, como $R^2=\beta^2+\gamma^2$ a integral tb. converge para 0 quando $\beta\to+\infty$. De modo que, tomando o limite $\beta\to+\infty$ obtem-se que

$$f(z_0)=-\tfrac{1}{2\pi i}\lim_{\beta\to\infty}\int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz=-\tfrac{1}{2\pi i}\lim_{\beta\to\infty}\int_{-\beta}^{\beta}\frac{f(\gamma+iy)}{(\gamma+iy-z_0)}dy=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\gamma+iy)}{(\gamma+iy-z_0)}dy$$

Então, procedendo formalmente, obtem-se que

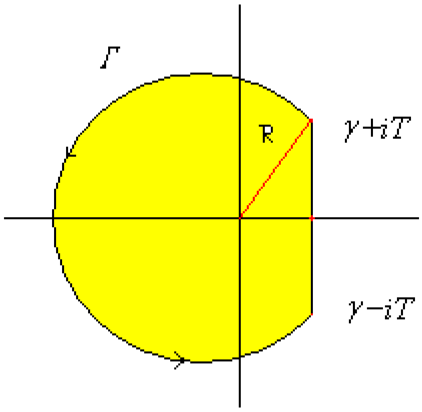
$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)](t)=\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(z)}{(s-z)}dz](t)=\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(z)\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-z}](t)dz$$

$$=\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(z)e^{zt}dz\,.\qquad\square$$

Contorno de Bromwich: Na prática a integral em *(FI)* é transformada numa integral de contorno

$$\boxed{f(t) = \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_B} e^{zt}F(z)dz}$$

onde $C_R = \Gamma \cup \{\mathbb{R}\mathrm{e}\, z = \gamma\}$ é o contorno de Bromwich;



Tem-se que $T = \sqrt{R^2 - \gamma^2}$ donde $T \to +\infty$ se só se $R \to +\infty$, donde

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{zt}F(z)dz = \lim_{R\to\infty}\left(\tfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_B} e^{zt}F(z)dz - \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{zt}F(z)dz\right)$$

OBS: Condição suficiente para que a integral sobre Γ convirja para zero quando $R \to +\infty$:

$$F(z) = O(z^{-k}) \quad \textbf{(CS)}$$

para algum k > 0. Esta condição sempre ocorre quando, por exemplo, $F(z)=p(z)/q(z)$, para p e q polinômios com grau(p) < grau(q).

Aplicação do teorema dos Resíduos à Inversão da Transformada de Laplace:

Se as singularidades de $F(s)$ são pólos (ordem finita) à esquerda de uma reta $\mathbb{R}\mathrm{e}\, z = \gamma$ e, além disso, tivermos

$$\int_{\Gamma} e^{zt}F(z)dz \to 0,\ qdo.\, R \to +\infty$$

no contorno de Bromwich, então

$$f(t) = \sum_k \mathrm{Res}(e^{zt}F(z) : z_k)\ \ , z_k = \text{pólo de } F(z).$$

Exemplo: Calcule

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}](t)\ ,\ a \in \mathbb{R}.$$

Tem-se que $F(s) = p(s)/q(s)$ com a polo simples e $gr(p) = 0 < 1 = gr(q)$. Então, F atende a condição suficiente (***CS***), donde

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}](t) = \mathrm{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z-a} : a\right) = a_{-1} = \varphi(a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{e^{zt}}{z-a} = e^{at}.$$

Exemplo: Calcule

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}](t).$$

Pólos de $F(z)=\dfrac{ze^{zt}}{(z+1)^3(z-1)^2}$:

$$z_1=-1\ (ordem\ 3)\Rightarrow \operatorname{Res}(e^{zt}F(z):-1)=\lim_{z\to-1}\tfrac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}[\frac{ze^{zt}}{(z-1)^2}]=a_{-1}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}[\frac{(1+tz)e^{zt}(z-1)^2-ze^{zt}2(z-1)}{(z-1)^4}]=\tfrac{1}{2}\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}[\frac{(1+tz)e^{zt}(z^2-2z+1)-e^{zt}(2z^2-2z)}{(z-1)^4}]=$$

$$=\tfrac{1}{2}\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}[\frac{(z^3-2z^2+z)te^{zt}+e^{zt}(1-z^2)}{(z-1)^4}]=$$

$$=\tfrac{1}{2}\lim_{z\to-1}\left(\frac{[(2+zt)(z-1)^2te^{zt}-2ze^{zt}](z-1)^4-e^{zt}[(1-z^2)+tz(z-1)^2]4(z-1)^3}{(z-1)^8}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{[(2-t)4te^{-t}+2e^{-t}]2^4-e^{-t}[-4t]4(-2^3)}{2^8}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2^6(2-t)te^{-t}+2^5e^{-t}-2^7te^{-t}}{2^8}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(2-t)te^{-t}}{2^2}+\frac{e^{-t}}{2^3}-\frac{te^{-t}}{2}\right)=\frac{te^{-t}}{2^2}-\frac{t^2e^{-t}}{2^3}+\frac{e^{-t}}{2^4}-\frac{te^{-t}}{2^2}=(\frac{1}{2^4}-\frac{t^2}{2^3})e^{-t}.$$

$$z_2=1(ordem2)\Rightarrow \operatorname{Res}(e^{zt}F(z):1)=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}[\frac{ze^{zt}}{(z+1)^3}]=\lim_{z\to1}[\frac{(e^{zt}+tze^{zt})(z+1)^3-3ze^{zt}(z+1)^2}{(z+1)^6}]=$$

$$=\frac{2^3(1+t)e^t-3.2^2e^t}{2^6}=\frac{(1+t)}{2^3}e^t-\frac{3}{2^4}e^t=(2t-1)\frac{e^t}{2^4}.$$

De modo que,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}](t)=\frac{1}{2^3}(\frac{1}{2}-t^2)e^{-t}+\frac{1}{2^4}(2t-1)e^t.$$