Notas de Aula:

Funções de uma variável complexa:

Introdução:

Motivação para construção dos números complexos:

Dada a equação algébrica

$$\boxed{x^2+1=0} \qquad (1)$$

Não existe número real que a satisfaça. Portanto, foi necessário definir um novo tipo de número que satisfizesse a equação.

Definição: (K.F.Gauss). Denomina-se ***imaginário puro*** ao número, ***i***, que satisfaz

$$\boxed{i=\sqrt{-1}} \qquad (2)$$

De modo que, por definição ***i*** é solução de (1), uma vez que

$$\boxed{i^2=-1} \qquad (3)$$

Considerando a equação do 2º grau genérica

$$ax^2+bx+c=0 \quad a,b,c\in\mathbb{R}$$

com $b^2-4ac<0$, tem-se que as suas raízes são dadas por números com a seguinte estrutura:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{-1}.\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

sendo que os números $-\frac{b}{2a}$ e $\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ são reais.

Definição: Denomina-se ***número complexo*** a todo número, **z**, com a seguinte estrutura

$$\boxed{z=a+ib}$$

onde $a,b\in\mathbb{R}$,sendo *a* denominada ***parte real*** e *b* ***parte imaginária*** de z. Notação:

$\mathrm{Re}[z]=a \quad , \quad \mathrm{Im}[z]=b$.

Álgebra dos números complexos:

Definição: $\mathbb{C} = \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$ é o conjunto dos números complexos.

Operações:

- Adição: $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$ **;** elemento neutro: $0_{\mathbb{C}} = 0 + i0$

- Inverso aditivo: $(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$

- Multiplicação: $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$ **;**elemento neutro: $1_{\mathbb{C}} = 1 + i0$

- Inverso multiplicativo: $\forall z = a+ib \neq 0_{\mathbb{C}}, \exists! z^{-1} = c + id \in \mathbb{C}$ tq: $zz^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$.

De fato, $zz^{-1} = 1 + i0 \Leftrightarrow \begin{cases} ac - bd = 1 \ ,(1) \\ bc + ad = 0 \ ,(2) \end{cases}$ .Como $z \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

O sistema possui uma única solução, pois $\det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$,e tem-se que

$$c = \frac{a}{a^2+b^2} \ , \ d = -\frac{b}{a^2+b^2} \Rightarrow z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} .$$

- Divisão: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2, z_2 \neq 0$ **,**tem-se que

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (a_1 + ib_1)(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2} - i\frac{b_2}{a_2^2+b_2^2}) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

Propriedades Algébricas:

O conjunto $\mathbb{C}$ possui uma estrutura algébrica de ***corpo comutativo***. De fato, $\mathbb{C}$ possui as seguintes propriedades:

Adição:

(i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ **comutatividade**

(ii) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ **associatividade**

(iii) $z + 0_{\mathbb{C}} = z$ **elemento neutro**

(iv) $z + (-z) = 0_{\mathbb{C}}$ **elemento inverso**

Multiplicação:

(v) $z_1z_2 = z_2z_1$ **comutatividade**

(vi) $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ **associatividade**

(vii) $z.1_{\mathbb{C}} = z$ **elemento neutro**

(viii) $zz^{-1} = 1_{\mathbb{C}}, \forall z \neq 0_{\mathbb{C}}$ **elemento inverso**

(ix) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ **distributividade**

Representação Geométrica

A idéia de representar os números complexos como pontos do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, se deve, ao que parece, ao suíço **Argand** (1755-1803). Entretanto, foi **Gauss** (1777-1855) quem generalizou seu uso através da bijeção:

$$\boxed{z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow P = (x, y) \in \mathbb{R}^2}$$

OBS: Com esta bijeção obteve-se que $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ como espaço vetorial real.

Definição: (Complexo Conjugado):

$$\boxed{z = a + ib \ \Rightarrow \ \bar{z} = a - ib}$$

Propriedades de $\bar{z}$ **:**

(P1) $z + \bar{z} = 2a$

(P2) $z\bar{z} = a^2 + b^2$

(P3) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(P4) $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$

(P5) $\overline{(z_1 / z_2)} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2, \forall z_2 \neq 0$

(P6) $\overline{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} = z_1 + z_2$

Definição: Dado $z = x + iy$ o ***módulo*** de z é dado pelo comprimento de z interpretado como vetor do $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Propriedades de $|z|$**:**

(P1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(P2) $|z|^2 = z\overline{z}$

(P3) $|\text{Re}[z]| \leq |z|$

(P4) $|\text{Im}[z]| \leq |z|$

(P5) $|\overline{z}| = |z|$

(P6) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

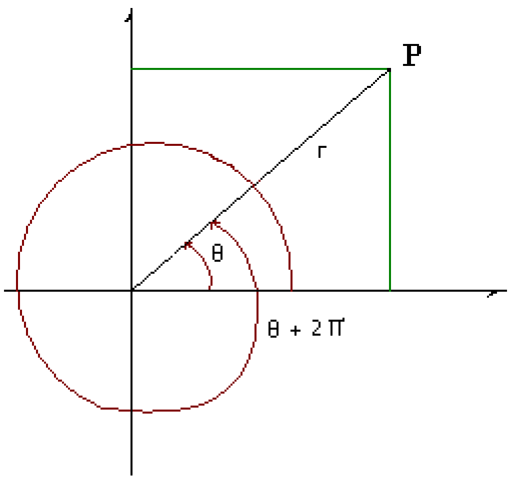
(P7) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}, \forall z \neq 0$

Forma Polar de um número complexo

Definição: Denomina-se ***argumento*** de um número complexo, $z = x + iy$, e denota-se por **arg** ***z***, ao ângulo θ que o vetor $\overrightarrow{OP}$, $P = (x, y)$, faz com o semi-eixo positivo-*x*.

$$z = x + iy \leftrightarrow P = (x, y) \to (r, \theta) : \begin{cases} x = r\cos\theta, y = r\,\text{sen}\,\theta \\ r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{arctg}\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

OBS: Existe uma infinidade (enumerável) de valores de θ ($\theta_k = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$) para os quais (r,θ) descreve o mesmo ponto *P*. De modo que, $z = x + iy$, possui uma infinidade de argumentos todos diferindo entre si de um múltiplo de 2π. Porém, *z* possuirá apenas um argumento, θ_0, satisfazendo $0 \le \theta_0 < 2\pi$. Este argumento θ_0 será denominado ***argumento principal*** de *z* e denotado por **Arg *z***.



OBS: 1) $\forall z \in \mathbb{R} - \{0\}$,Arg z = 0.

2) Arg 0 não é definido.

3) Arg $\bar{z}$ = Arg z .

Definição: Forma Polar: Todo $z = x + iy$ possui a seguinte representação

$$\boxed{z = r(\cos\theta_0 + i\,\text{sen}\,\theta_0)}$$

Propriedades:

(P1) $-z = -r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = r(\cos(\theta+\pi) + i\,\text{sen}(\theta+\pi))$

(P2)

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) r(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_2\cos\theta_1)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned}$$

(P3) $z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta)\ \ , n = 1, 2, \cdots$ **(Fórmula de De Moivre)**

(P4) $z^{-1} = r^{-1}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)\ \ , \forall z \neq 0$.

(P5) $z^{-n} = r^{-n}(\cos n\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)\ \ , \forall z \neq 0$.

(P6) $\forall z_2 \neq 0, \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$.

Fórmula de Euler

Sabemos pelo Cálculo Diferencial as seguintes representações em séries de Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\mathrm{sen}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

De modo que, procedendo formalmente obtém-se para $y \in \mathbb{R}$ que

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k i y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1} = \cos y + i\,\mathrm{sen}\, y$$

Aplicando a forma polar, obtemos $\forall z \neq 0$ a representação

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = re^{i\theta}}$$

Propriedades:

(P1) $\bar{z} = re^{-i\theta}$

(P2) $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

(P3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

(P4) $z^n = r^n e^{in\theta} \quad , n \in \mathbb{Z}$

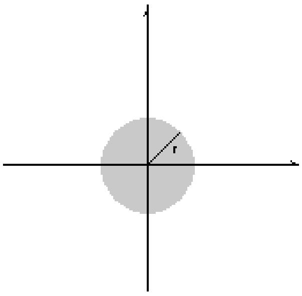
(P5) $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \quad , k \in \mathbb{Z}$

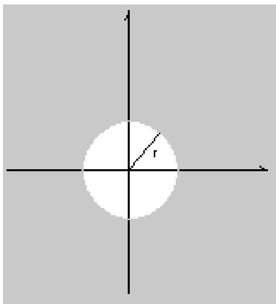
Função de uma variável complexa

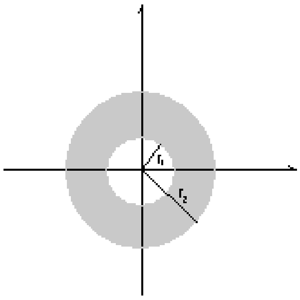
Regiões do plano complexo

O plano complexo $\mathbb{C}$ pode ser decomposto em regiões limitadas por curvas fechadas ou prolongadas ao infinito. Para se definir uma região se utiliza uma ou várias desigualdades.

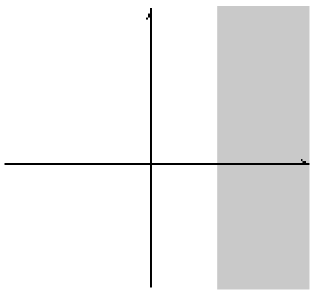
Exemplo:

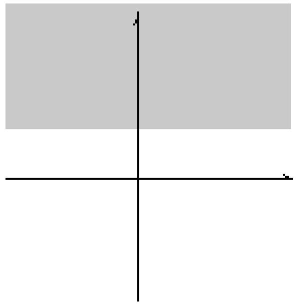


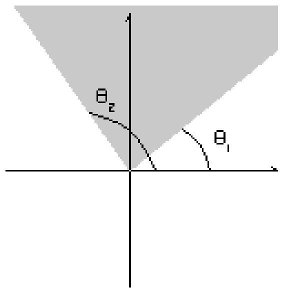




$|z| < r$ $\qquad$ $|z| > r$ $\qquad$ $r_1 < |z| < r_2$







$\mathrm{Re}(z) > x_0$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{Im}(z) > y_0$ $\qquad\qquad$ $\theta_1 < \mathrm{Arg}\, z < \theta_2$

Exercício: determine a região dada por $\mathrm{Re}(1/z) > \frac{1}{2}$.

Definição: Um conjunto $S \subset \mathbb{C}$ é limitado se $\exists R > 0$ tal que:

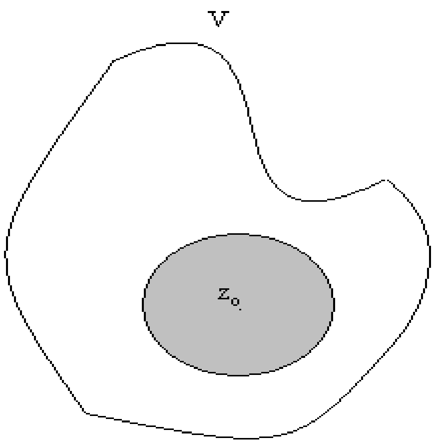
$$|z| < R \quad ,\forall z \in S.$$

Definição: Denomina-se ***disco*** de centro z_0 e raio $r > 0$ ao conjunto

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Noções Topológicas

Definição: Denomina-se ***vizinhança*** de um ponto z_0 a todo conjunto $V(z_0)$ que contem um disco $D_r(z_0)$.



Definição: Um ponto z_0 é ***ponto interior*** de um conjunto *S* se existir uma vizinhança $V(z_0)$ totalmente contida em *S*. Notação: $\overset{0}{S} = \{z \in S : z \text{ é ponto interior de } S\}$.

Definição: Um ponto z_0 é ***ponto exterior*** a um conjunto *S* se existir uma vizinhança $V(z_0)$ tq:

$$V(z_0) \cap S = \varnothing.$$

Definição: Um ponto z_0 é um ***ponto da fronteira*** de *S* se não é nem ponto interior nem ponto exterior de *S*. Notação: $\partial S = \{z \in \mathbb{C} : \text{z é ponto da fronteira de } S\}$.

Definição: Um ponto $z_0 \in S$ é um ***ponto isolado*** de *S* se existe uma vizinhança $V(z_0)$ tq:

$$V(z_0) \cap (S - \{z_0\}) = \varnothing.$$

Definição: Um ponto z_0 é um ***ponto de acumulação*** de um conjunto *S* se toda vizinhança de $V(z_0)$ contém um número infinito de pontos de *S*. Notação:

$$S' = \{z \in \mathbb{C} : z \textit{ é ponto de acumulação de } S\}.$$

Definições básicas:

(i) Um conjunto é ***aberto*** se possui apenas pontos interiores.

(ii) Se $S^c = \{z \in \mathbb{C} : z \notin S\}$ for um conjunto aberto então *S* é dito ser ***fechado***.

(iii) Um conjunto é dito ser ***conexo*** se qualquer par de pontos pertencentes a ele pode ser unido por uma poligonal inteiramente contida no conjunto.

(iv) Um ***domínio*** é um conjunto aberto e conexo.

(v) Uma ***região*** é um domínio com fronteira.

(vi) Um conjunto é ***simplesmente conexo*** se toda curva fechada contida nele contém em seu interior somente pontos interiores ao conjunto.

Definição: Diz-se que uma ***função de uma variável complexa*** $w = f(z)$ está definida em um domínio *D* se a cada ponto $z \in D$ corresponde um único (***função univalente***) ou vários valores (***função multivalente***) de $w \in \mathbb{C}$.

Exemplo: (função univalente)

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto w = f(z) = z^2$$

Tem-se que

$$z^2 = (x+iy)^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2 - y^2 + i(2xy) \Rightarrow w = x^2 - y^2 + i(2xy).$$

De modo que,

$$z = x+iy \xrightarrow{\;f\;} w = u+iv$$

onde

$$u = u(x,y) = x^2 - y^2 \quad , \quad v = v(x,y) = 2xy$$

Definição: A cada função complexa $f : D \to \mathbb{C} : z = x+iy \mapsto w = u+iv$ estão associadas duas funções *u* e *v*, a valores reais, de duas variáveis reais *x* e *y*, denominadas;

$$u = u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) \quad e \quad v = v(x,y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Exemplo: (função multivalente) A cada número complexo $z \neq 0$ estão associados *n* números complexos, as ***raízes n-ésimas*** de *z*, dadas por $\sqrt[n]{z}$.

Elas são as soluções da equação

$$\boxed{w^n = z}$$

Utilizando a representação polar, tem-se que

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$
$$w = \rho(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

Utilizando a Fórmula de De Moivre obtém-se que

$$\rho^n(\cos n\phi + i\,\mathrm{sen}\,n\phi) = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$$

Então, necessariamente

$$\rho^n \cos n\phi = r\cos\theta \qquad e \qquad \rho^n\,\mathrm{sen}\,n\phi = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Estas equações são satisfeitas se

$$\rho^n = r \quad , \quad n\phi = \theta + 2k\pi \ ,\forall k \in \mathbb{Z}.$$

De modo que,

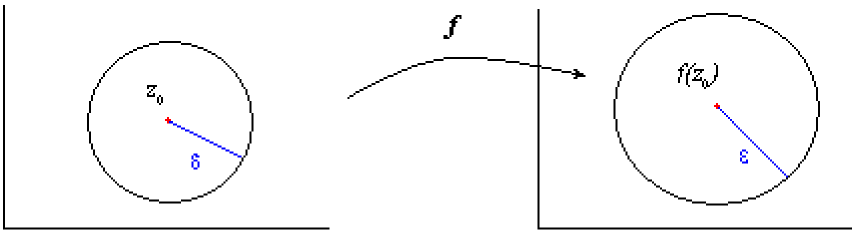
$$\boxed{w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$$

Esta fórmula produz *n* raízes distintas somente quando $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Definição: $f : D \to \mathbb{C}$, *D* domínio, possui um **limite** em $z_0 \in D'$ se existe um número *L* com a seguinte propriedade:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0 : \forall z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon}$$

Neste caso denota-se $\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = L}$



OBS: Para a existência do limite de *f(z)* quando $z \to z_0$ não é necessário que *f* esteja definida em z_0, ou seja, que $z_0 \in D$. ■

Teorema: Seja $f : D \to \mathbb{C}$, *D* domínio, e $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. Se $z_0 \in D'$, então $L = a + ib$ satisfaz

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

Se só se

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \mathrm{Re}\, f(z) = a \qquad , \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(z) = b$$

Definição: (Continuidade em um ponto). Sejam $f: D \to \mathbb{C}$, e $z_0 \in D$. Diz-se que *f(z)* é **contínua em** z_0 se:

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)}$$

Por extrapolação, diz-se que *f(z)* é contínua em *D* se é contínua em todo ponto de *D*.

Teorema: Hipótese: $f: D \to \mathbb{C}$ e $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$.

Tese: *f(z)* é contínua em z_0 se só se $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ e $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$

são contínuas em (x_0, y_0).

Exemplo: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto f(z) = x + i(x^2 + y^3)$ é contínua em $\mathbb{C}$.

Exemplo: $f: D \to \mathbb{C} : z \mapsto f(z) = e^{1/(x-1)} + i\cos xy$

é contínua em *D* se $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 1\}$ ou $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$. *f(z)* é descontínua na reta $\operatorname{Re}(z) = 1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$.

Propriedades: Dados $f, g: D \to \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$, tal que $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ e $\lim_{z \to z_0} g(z) = M$:

(P1) $\lim_{z \to z_0} [\alpha f(z) + \beta g(z)] = \alpha L + \beta M, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(P2) $\lim_{z \to z_0} f(z) g(z) = LM$

(P3) $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{L}{M}$ (se $M \neq 0$)

Derivação e Funções Analíticas

A definição da derivada de uma função complexa num ponto z_0 é análoga ao caso real. Entretanto, existem, conforme será visto, diferenças fundamentais ente funções a valores reais e funções a valores complexos em relação a derivação.

Definição: Seja *D* um domínio, $z_0 \in D$ e $f : D \to \mathbb{C}$. A **derivada de *f*(*z*) em** z_0 é dada pelo limite

$$\boxed{\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}}$$

onde $\Delta z = z - z_0$. Se este limite existe dizemos que *f*(*z*) é derivável em z_0 e denotamos esse limite por

$$\boxed{f'(z_0) \quad ou \quad \frac{df}{dz}(z_0)}$$

Diz-se que *f*(*z*) é derivável em *D* se ela for derivável em todo ponto de *D*.

OBS: A existência do limite acima deve independer de como $\Delta z = z - z_0$ tende a zero em $\mathbb{C}$, ou seja, de como *z* tende a z_0 em $\mathbb{C}$.

Exemplo: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto f(z) = z^2$.

Tem-se que $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \frac{2z_0 \Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = 2z_0 + \Delta z$$

Logo,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0 .$$

Exemplo: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto f(z) = |z|^2$ é derivável apenas em $z_0 = 0$. É exatamente o caso oposto ao caso real!

Tem-se que $\forall z_0 \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z} = \frac{(z_0 + \Delta z)\overline{(z_0 + \Delta z)} - z_0 \overline{z_0}}{\Delta z} \\ &= \frac{(z_0 + \Delta z)(\overline{z_0} + \overline{\Delta z}) - z_0 \overline{z_0}}{\Delta z} = \frac{z_0 \overline{\Delta z} + \overline{z_0} \Delta z + \Delta z \overline{\Delta z}}{\Delta z} \\ &= z_0 \left(\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \right) + \overline{z_0} + \overline{\Delta z}\end{aligned}$$

Tomando $\Delta z = r \in \mathbb{R} - \{0\}$ e fazendo $\Delta z \to 0$, obtém-se que

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{r\to 0}\left[z_0\left(\frac{\overline{r}}{r}\right)+\overline{z_0}+\overline{r}\right]=z_0+\overline{z_0}$$

Por outro lado, tomando $\Delta z=ir, r\in\mathbb{R}-\{0\}$ e fazendo $\Delta z\to 0$, obtém-se que

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{r\to 0}\left[z_0\left(\frac{\overline{ir}}{ir}\right)+\overline{z_0}+\overline{ir}\right]=\overline{z_0}-z_0$$

OBS: $z_0+\overline{z_0}=\overline{z_0}-z_0\Leftrightarrow z_0=0$. ■

De modo que, não existe $f'(z_0)$, $\forall z_0\neq 0$. Já para $z_0=0$, tem-se que

$$f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta z|^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\overline{\Delta z}=0$$

OBS: De modo que, uma função complexa pode ser contínua em todos os pontos e não ser derivável em nenhum ponto ou apenas um ponto. Já a recíproca é verdadeira, se $f(z)$ for derivável em um ponto z_0 então ela é contínua em z_0, uma vez que

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\Delta z\frac{[f(z_0+\Delta z)-f(z_0)]}{\Delta z}\to 0.f'(z_0)=0, \text{ qdo. } \Delta z\to 0.$$

Portanto,

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0).\ ■$$

Propriedades: Sejam $f,g:D\to\mathbb{C}$ deriváveis em $z_0\in D$.

(P1) $\frac{d}{dz}(\alpha f(z)+\beta g(z))\Big|_{z=z_0}=\alpha f'(z_0)+\beta g'(z_0) \quad ,\forall \alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

(P2) $\frac{d}{dz}(f(z)g(z))\Big|_{z=z_0}=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$.

(P3) $\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)\Bigg|_{z=z_0}=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2} \quad ,se\ g(z_0)\neq 0$.

Definição: Uma função $f: D \to \mathbb{C}$ diz-se **analítica em** $z_0 \in D$ se existe $r > 0$ tal que o disco $D_r(z_0)$ está contido em *D* e $f(z)$ é derivável em todo ponto de $D_r(z_0)$.

OBS: Apesar da expressão "analítica em z_0" sugerir uma propriedade de $f(z)$ em apenas **pontual**, na verdade é uma propriedade **local**, pois envolve uma vizinhança de z_0. No exemplo $f(z) = |z|^2$ temos uma função derivável apenas em $z_0 = 0$, de modo que não pode ser analítica em $z_0 = 0$. ■

Seja $f: D \to \mathbb{C} : z = x + iy \mapsto f(z) = u + iv$. Vejamos as condições ***necessárias*** e ***suficientes*** sobre $u(x, y)$ e $v(x, y)$ que garantam que $f(z)$ seja derivável em $z_0 \in D$.

Teorema: (Condições Necessárias)

Hipótese: Sejam $f: D \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in D$, tal que *f* é derivável em z_0.

Tese:

(i) $u(x, y)$ e $v(x, y)$ possuem derivadas parciais de 1ª ordem em (x_0, y_0).

(ii) As derivadas parciais de *u* e *v* no ponto (x_0, y_0) satisfazem as ***equações de Cauchy-Riemann***:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad e \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Prova:

Como existe $f'(z_0)$, então necessariamente

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Com o limite existindo independentemente de como $\Delta z \to 0$. Então, fazendo $\Delta z = r \to 0$ através de valores reais, tem-se que

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{r\to 0} \frac{[u(x_0+r,y_0)+iv(x_0+r,y_0)]-[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)]}{r} \\
&= \lim_{r\to 0}\left[\frac{u(x_0+r,y_0)-u(x_0,y_0)}{r}+i\frac{v(x_0+r,y_0)-v(x_0,y_0)}{r}\right] \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, fazendo $\Delta z = ir \to 0$, obtem-se que

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{ir\to 0} \frac{[u(x_0,y_0+r)+iv(x_0,y_0+r)]-[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)]}{ir} \\
&= \lim_{r\to 0}\left[\frac{u(x_0,y_0+r)-u(x_0,y_0)}{ir}\right]+i\left[\frac{v(x_0,y_0+r)-v(x_0,y_0)}{ir}\right] \\
&= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

Portanto, existem as derivadas parciais u_x, u_y, v_x, v_y em (x_0, y_0). Além disso, pela unicidade do limite e pela condição de igualdade entre dois números complexos, tem-se que necessariamente

$$
u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0) \quad e \quad u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0) \quad \blacksquare
$$

OBS: As equações de Cauchy-Riemann são uma conseqüência direta do fato da existência do limite independer de como $\Delta z \to 0$ em $\mathbb{C}$. Entretanto, elas não são condições suficientes para garantir que $f(z)$ seja derivável em z_0. De fato, a função

$$
f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}: z \mapsto f(z)=|x|+i|y|
$$

satisfaz

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{d}{dx}|x|=\begin{cases}1\ , x\geq 0, \forall y\in\mathbb{R}\\ -1, x<0, \forall y \in \mathbb{R}\end{cases} \qquad e \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0 \\
&\frac{\partial v}{\partial x}=0 \qquad e \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{d}{dy}|y|=\begin{cases}1,\ \ y\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}\\ -1, y<0, \forall x \in \mathbb{R}\end{cases}
\end{aligned}
$$

De modo que, $u_x(0,0)=1=v_y(0,0) \quad e \quad u_y(0,0)=0=-v_x(0,0)$.Mas, tomando $\Delta z = r \in \mathbb{R}-\{0\}$, obtém-se que

$$
f'(0)=\lim_{r\to 0}\frac{f(0+r)-f(0)}{r}=\lim_{r\to 0^{\pm}}\frac{|r|}{r}=\pm 1 .
$$

Logo, não existe $f'(0)$.

O seguinte resultado fornece condições suficientes para que f seja derivável em z_0.

Teorema: (Condições Suficientes)

Hipóteses:

(H1) $f : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ tais que $u(x,y)$ e $v(x,y)$ possuem derivadas parciais de ordem **contínuas** em uma vizinhança de z_0 contida em D.

(H2) $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0).

Tese: $f(z)$ é derivável em z_0.

Exemplo: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z = x + iy \mapsto f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$.

Tem-se que

$$u(x,y) = e^x \cos y \qquad e \qquad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$$

De modo que,

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y \quad , \quad u_y = -e^x \operatorname{sen} y \\ v_x &= e^x \operatorname{sen} y \quad , \quad v_y = e^x \cos y \end{aligned}$$

Então, $u(x,y)$ e $v(x,y)$ possuem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em todo $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. Portanto, f é derivável em todo ponto de $\mathbb{C}$, e tem-se que

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_x(x,y) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = f(z), \forall z \in \mathbb{C}.$$

Além disso, restringindo f a $\mathbb{R}$, ou seja, fazendo $y = \operatorname{Im} z = 0$, obtém-se que

$$f(z) = f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esses fatos motivarão a definição da função exponencial complexa.

Agora, seria muito útil se nós também conseguíssemos condições necessárias e suficientes para que uma função complexa seja analítica em um ponto de seu domínio.

Teorema: (Condições Necessárias)

Hipótese: Seja $f : D \to \mathbb{C}$ tal que $f(z)$ é analítica em $z_0 \in D$.

Tese: $u(x,y)$ e $v(x,y)$ possuem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em $D_r(z_0)$, para algum $r>0$,que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em $D_r(z_0)$.

Teorema: (Condições Suficientes)

Hipóteses:

(H1) $f: D \to \mathbb{C}$ com $u(x,y)$ e $v(x,y)$ possuindo derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em $D_r(z_0)$, para algum $r>0$.

(H2) $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em $D_r(z_0)$.

Tese: $f(z)$ é analítica em z_0.

OBS: Se as condições acima forem válidas para todo ponto de *D* diz-se que $f(z)$ é analítica em *D*. ■

Teorema: (Regra da Cadeia)

Hipóteses:

(H1) $g: D \to \mathbb{C}$, analítica em *D*, com $g(D) = E \subseteq \mathbb{C}$.

(H2) $f: W \to \mathbb{C}$, analítica no domínio *W*, com $E \subseteq W$.

Tese:

(T1) $F(z) = f(g(z)) = (f \circ g)(z)$ é analítica em *D*.

(T2) Para cada $z \in D$, tem-se que

$$\boxed{F'(z) = f'(g(z))g'(z)}$$