Função Exponencial: Conforme já vimos, o candidato natural à função exponencial complexa é dado pela função

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}: z=x+iy\mapsto f(z)=e^x\cos y+ie^x \operatorname{sen} y$$

Uma vez que

$$f\big|_{\mathbb{R}}=e^x \quad ,\forall x\in\mathbb{R}.$$

E uma generalização para ser útil deve preservar as propriedades do que está sendo generalizado. Além disso, as duas propriedades que caracterizam a exponencial real são dadas por:

$$f'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R} \quad , \quad f(x_1+x_2)=f(x_1).f(x_2),\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$$

A primeira propriedade já foi verificada. Quanto a segunda, se assumirmos que

$$e^z=e^{x+iy}:=e^xe^{iy} \quad ,\forall z\in\mathbb{C}.$$

Então, pela fórmula de Euler, teremos que

$$e^z=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y) \quad ,\forall z\in\mathbb{C}.$$

Definição: A função **exponencial complexa** é dada por

$$\boxed{\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}: z\mapsto \exp(z)=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)}$$

Com esta definição obtemos que $\exp(z)$ é analítica em todo $\mathbb{C}$ e satisfaz:

$$\begin{aligned}
\exp(z_1+z_2)&=e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\operatorname{sen}(y_1+y_2)]\\
&=e^{x_1}e^{x_2}\left[\cos y_1\cos y_2-\operatorname{sen} y_1\operatorname{sen} y_2+i[\operatorname{sen} y_1\cos y_2+\operatorname{sen} y_2\cos y_1]\right]\\
&=e^{x_1}e^{x_2}[(\cos y_1+i\operatorname{sen} y_1)(\cos y_2+i\operatorname{sen} y_2)]\\
&=e^{x_1}(\cos y_1+i\operatorname{sen} y_1).e^{x_2}(\cos y_2+i\operatorname{sen} y_2)\\
&=\exp(z_1)\exp(z_2) \quad ,\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Funções Trigonométricas: Pela fórmula de Euler, tem-se que

$$\begin{cases} e^{iy}=\cos y+i\operatorname{sen} y\\ e^{-iy}=\cos y-i\operatorname{sen} y\end{cases} \quad ,\forall y\in\mathbb{R}.$$

De modo que, $$\begin{cases}\cos y=\dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\\[2mm] \operatorname{sen} y=\dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\end{cases} \quad ,\forall y\in\mathbb{R}.$$

Propriedades: Denotando exp(z) por e^z tem-se

(P1) $\left|e^z\right| = e^x, \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$.

(P2) $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

(P3) $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}, \forall z \in \mathbb{C}$.

(P4) $\exp(z + 2k\pi) = \exp(z), \forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{Z}$.

(P5) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}, \forall z \in \mathbb{C}$.

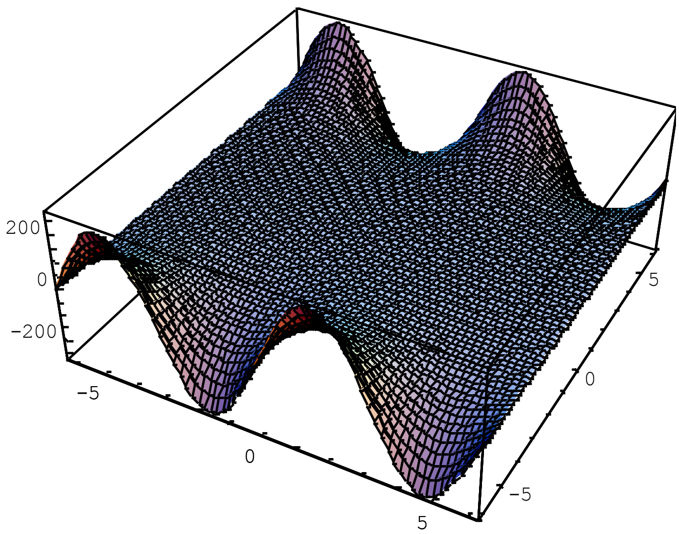
Definição: As funções **complexas cosseno e seno** são definidas $\forall z \in \mathbb{C}$ como sendo

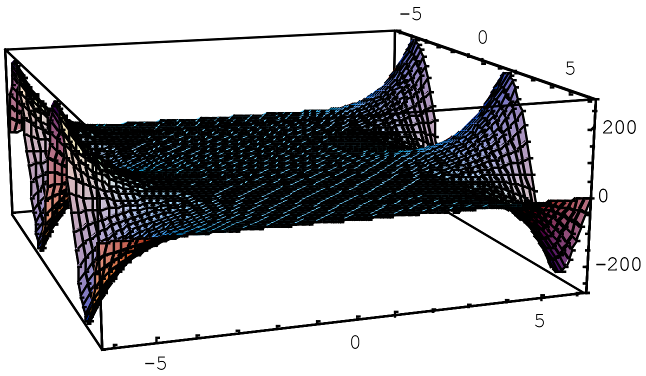
$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} \qquad \boxed{\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$$

Além disso, quando os denominadores forem diferentes de zero, definem-se as seguintes funções trigonométricas complexas:

$$\boxed{\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}} \quad \boxed{\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}} \quad \boxed{\cos\sec z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}} \quad \boxed{\sec z = \frac{1}{\cos z}}$$

Gráficos: Re (senz)





Pergunta: Aonde se tem $\operatorname{sen} z = 0$ e $\cos z = 0$? Da trigonometria real, sabemos que

$\operatorname{sen} x = 0 \;\; , \forall x = k\pi, \cos x = 0, \forall x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$. Será que existem outros números complexos z tal que $\operatorname{sen} z = 0$ e $\cos z = 0$? Vejamos, tem-se que

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2i}$$

$$= \frac{(e^{-y} - e^{y})}{2i}\cos x + i\frac{(e^{-y} + e^{y})}{2i}\operatorname{sen} x = -i\frac{(e^{-y} - e^{y})}{2}\cos x + \frac{(e^{-y} + e^{y})}{2}\operatorname{sen} x$$

ou seja,

$$\boxed{\operatorname{sen} z = \cosh y \operatorname{sen} x + i \operatorname{senh} y \cos x \;, \forall z \in \mathbb{C}}$$

Analogamente, obtemos que

$$\boxed{\cos z = \cosh y \cos x - i \operatorname{senh} y \operatorname{sen} x, \forall z \in \mathbb{C}}.$$

De modo que,

$$\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh y \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \\ \operatorname{senh} y \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ y = 0 \end{cases}$$

Analogamente,

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh y \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \\ \operatorname{senh} y \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \operatorname{sen} x = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Propriedades:

(P1) $\operatorname{sen}^2 z+\cos^2 z=1$

(P2) $\operatorname{sen}(-z)=-\operatorname{sen} z \quad , \quad \cos(-z)=\cos z$

(P3) $\operatorname{sen}(z_1+z_2)=\operatorname{sen} z_1 \cos z_2+\operatorname{sen} z_2 \cos z_1$

(P4) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1 \cos z_2-\operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$

OBS: Entretanto, uma propriedade será sacrificada

$$|\operatorname{sen} x|\leq 1 \quad , \quad |\cos x|\leq 1, \forall x\in\mathbb{R}.$$

De fato, tem-se que

$$|\operatorname{sen} z|^2=\operatorname{sen}^2 x\cosh^2 y+\cos^2\operatorname{senh}^2 y=\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{senh}^2 y, \forall z\in\mathbb{C}$$

e

$$|\cos z|^2=\cos^2 x+\operatorname{senh}^2 y, \forall z\in\mathbb{C}. \ ■$$

Exercício: Verifique se

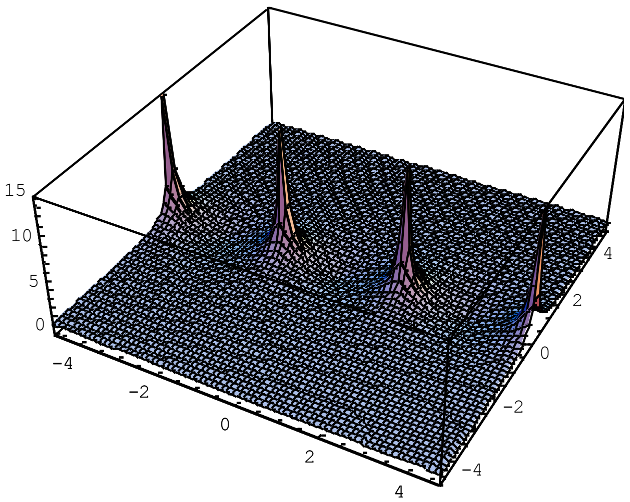
(i) $\operatorname{sen},\cos:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

(ii) $\operatorname{tg},\sec:\mathbb{C}-\{(2k+1)\pi/2:k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{C}$

(iii) $\operatorname{cotg},\operatorname{cossec}:\mathbb{C}-\{k\pi:k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{C}$

São analíticas e calcule suas derivadas.

Gráficos: $|\operatorname{tg} z|$



A partir da exponencial complexa somos levados as seguintes generalizações da trigonometria hiperbólica

Definição: $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}} \qquad \boxed{\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}}$$

Além disso, aonde os denominadores não se anulam estão definidas as seguintes funções hiperbólicas complexas

$$\boxed{\operatorname{tgh} z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}} \quad \boxed{\coth z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}} \quad \boxed{\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}} \quad \boxed{\cos\operatorname{sech} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z}}$$

Pergunta: Aonde se tem $\operatorname{senh} z = 0$ e $\cosh z = 0$? Da trigonometria hiperbólica real sabemos que $\operatorname{senh} x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $\cosh x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} z = \operatorname{senh}(x+iy) &= \frac{e^{(x+iy)} - e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y) - e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)}{2} \\ &= \frac{(e^{x} - e^{-x})}{2}\cos y + i\frac{(e^{x} + e^{-x})}{2}\operatorname{sen} y \\ &= \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

De modo que,

$$\operatorname{senh} z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{senh} x \cos y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = k\pi \end{cases} \\ \cosh x \operatorname{sen} y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = k\pi \end{cases}$$

Analogamente, obtém-se que

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y.$$

De modo que,

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh x \cos y = 0 \Leftrightarrow y = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = k\pi \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Propriedades:

(P1) $\operatorname{senh}(iy) = i \operatorname{sen} y$, $\cosh(iy) = \cos y$

(P2) $|\operatorname{senh} z|^{2} = \operatorname{senh}^{2} x + \operatorname{sen}^{2} y$

(P3) $|\cosh z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y$

(P4) $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$

Exercício: Verifique se

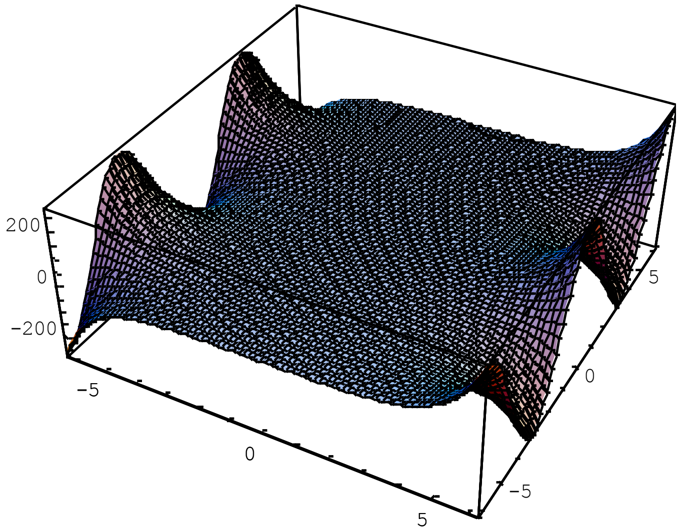
(i) $\operatorname{senh}, \cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

(ii) $\operatorname{tgh}, \operatorname{sech} : \mathbb{C} - \{i(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$

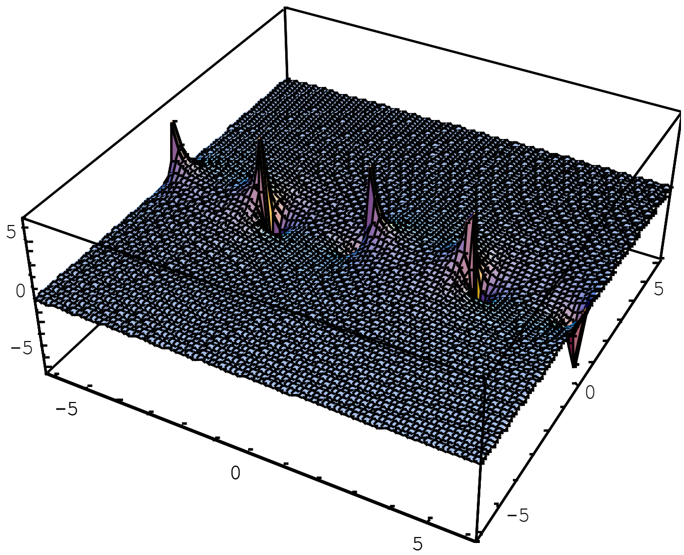
(iii) $\operatorname{cotgh}, \operatorname{cossech} : \mathbb{C} - \{ik\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$

São analíticas e calcule suas derivadas.

Gráficos: $|\text{Senhz}|$



$|\operatorname{cossech} z|$



Função Logarítmica:

Dado $w \in \mathbb{C}$ gostaríamos de resolver a equação

$$\boxed{e^z = w} \qquad (1)$$

Ou seja, gostaríamos de encontrar os possíveis valores de $z = f^{-1}(w)$ onde $f(z) = e^z$. Lembrando que $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$, então a equação (1) não possuirá solução para $w = 0$. Já para $w \neq 0$, temos que

$$w = |w| e^{i \arg w}$$

onde $\arg w = \theta_k = \theta_0 + 2k\pi$, onde θ_0 =Arg *z*. Seja θ_k um valor particular de arg *w*, se tomarmos

$$z = \ln|w| + i\theta_k$$

Teremos que

$$e^z = e^{(\ln|w| + i\theta_k)} = e^{\ln|w|} e^{i\theta_k} = |w| e^{i\theta_k} = w.$$

Então esse valor de *z* é uma solução da equação (1). Para qualquer outro valor de arg *w* também obteremos uma solução.

Definição: Dado $z \neq 0$, **um logaritmo de *z*** é qualquer número complexo

$$\boxed{\log_k z = \ln|z| + i \arg z}$$

onde arg *z* é qualquer argumento de *z*, ou seja $\arg z = Argz + 2k\pi = \theta_0 + 2k\pi = \theta_k, k \in \mathbb{Z}$.

OBS: De modo que, existe uma infinidade (enumerável) de valores para o logaritmo de um número complexo $z \neq 0$. Isso evidentemente não é uma função unívoca ou univalente. Entretanto, se *z* é um número real positivo, dentre todos os possíveis valores para o logaritmo de *z*, existe apenas um que coincide com o logaritmo real de *z*: o logaritmo de *z* correspondente a escolha arg *z* = 0.

Definição: Dado $z \neq 0$, o **valor principal do logaritmo de z** é dado por

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z}$$

A função $\operatorname{Log} : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} : z \mapsto \operatorname{Log} z$ é denominada **Função Logaritmo Principal**.

Definição: A função multivalente **função logaritmo complexo** é dada pela família de os logaritmos de $z \neq 0$

$$\boxed{\log z = \{\log_k : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} : z \mapsto \log_k z = \ln|z| + i\theta_k \,|\, 2k\pi \leq \theta_k < 2(k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$$

Cada função dessa família é dita ser um **ramo** da função logarítmica complexa, o *k*-ésimo ramo. A função logaritmo principal, o zero-ésimo ramo, é denominado **ramo principal**.

Teorema: Para cada ramo da função logaritmo complexo tem-se que:

(i) $\log_k z$ é descontínua ao longo do eixo real positivo $\mathbb{R}^+$.

(ii) $\log_k z$ é analítica em $\mathbb{C}-\mathbb{R}^+$ e $\dfrac{d}{dz}\log_k z = \dfrac{1}{z}$.

(iii) Qualquer ramo difere de outro ramo por um múltiplo inteiro de $i2\pi$.

Prova:

(**i**) Fixo $k \in \mathbb{Z}$, seja o k-ésimo ramo $\log_k z$. Para todo $z_0 \in \mathbb{R}^+$, conforme z se aproxima de z_0 pelo semi-plano superior arg z se aproxima de $\arg z_0 = 2k\pi$ e conforme z se aproxima de z_0 pelo semi-plano inferior arg z se aproxima de $\arg z_0 = 2(k+1)\pi$ .Portanto, para z no semi-plano superior

$$\lim_{z\to z_0}\log_k z = \lim_{z\to z_0}\ln|z| + i\lim_{z\to z_0}\arg z = \ln|z_0| + i2k\pi$$

Por outro lado, para z no semi-plano inferior

$$\lim_{z\to z_0}\log_k z = \lim_{z\to z_0}\ln|z| + i\lim_{z\to z_0}\arg z = \ln|z_0| + i2(k+1)\pi$$

De modo que, os limites diferem por $2\pi i$.

(**ii**) Seja $z \neq 0$, $z \notin \mathbb{R}^+$,e seja $k \in \mathbb{Z}$,então

$$z = re^{i\theta_k} = r\cos\theta_k + i\,\mathrm{sen}\,\theta_k \quad ,2k\pi \le \theta_k < 2(k+1)\pi$$

e

$$\log_k z = \ln r + i\theta_k = u(r,\theta_k) + iv(r,\theta_k)$$

Então

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x & \qquad u_y &= u_r r_y + u_\theta \theta_y \\ v_x &= v_r r_x + v_\theta \theta_x & \qquad v_y &= v_r r_y + v_\theta \theta_y \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\begin{cases} r_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{r\cos\theta_k}{r}=\cos\theta_k \\ r_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{r\,\mathrm{sen}\,\theta_k}{r}=\mathrm{sen}\,\theta_k \end{cases}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta_k=\frac{y}{x}\Rightarrow\begin{cases} \sec^2\theta_k(\theta_k)_x=(-\dfrac{y}{x^2})\Rightarrow(\theta_k)_x=(-\dfrac{y}{x^2})\cos^2\theta_k=-\dfrac{r\,\mathrm{sen}\,\theta_k}{r^2\cos^2\theta_k}.\cos^2\theta_k=-\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta_k}{r} \\ \sec^2\theta_k(\theta_k)_y=(\dfrac{1}{x})\Rightarrow(\theta_k)_y=(\dfrac{1}{x})\cos^2\theta_k=(\dfrac{1}{r\cos\theta_k})\cos^2\theta_k=\dfrac{\cos\theta_k}{r} \end{cases}$$

De modo que,

$$u_x=u_r\cos\theta_k+u_\theta(-\frac{\mathrm{sen}\,\theta_k}{r})=\frac{\cos\theta_k}{r}=\frac{(x/r)}{r}=\frac{x}{x^2+y^2}$$
$$u_y=u_r\,\mathrm{sen}\,\theta_k+u_\theta(\frac{\cos\theta_k}{r})=\frac{\mathrm{sen}\,\theta_k}{r}=\frac{(y/r)}{r}=\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$v_x=v_r\cos\theta_k+v_\theta(-\frac{\mathrm{sen}\,\theta_k}{r})=-\frac{\mathrm{sen}\,\theta_k}{r}=-\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$v_y=v_r\,\mathrm{sen}\,\theta_k+v_\theta(\frac{\cos\theta_k}{r})=\frac{\cos\theta_k}{r}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

Portanto, u e v possuem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em cada semi-faixa:

$$r>0\ ;\ 2k\pi<\theta_k<2(k+1)\pi$$

Onde satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, o que implica na analiticidade de cada ramo $\log_k z$. Além disso, tem-se que

$$\frac{d}{dz}\log_k z=u_x+iv_x=\frac{\cos\theta_k}{r}-i\frac{\mathrm{sen}\,\theta_k}{r}=\frac{1}{r}(\cos\theta_k-i\,\mathrm{sen}\,\theta_k)=\frac{1}{r}e^{-i\theta_k}=\frac{1}{re^{i\theta_k}}=\frac{1}{z}$$

A semi-reta $\{z\in\mathbb{R}^+\}$ onde todos os ramos da função logarítmica multivalente deixam de ser funções analíticas (não são sequer contínuas) é dita ser um **corte** para os ramos.

(**iii**) Sejam o m-ésimo ramo

$$\log_m z=\ln|z|+i\theta_m\qquad,2m\pi\le\theta_m<2(m+1)\pi$$

E o n-ésimo ramo

$$\log_n z = \ln|z| + i\theta_n \qquad ,2n\pi \le \theta_n < 2(n+1)\pi$$

Supondo $m < n$,então $n = m + k, k \ge 1$. Logo,

$$\log_n z = \ln|z| + i\theta_n = \ln|z| + i(\theta_m + 2k\pi) = \log_m z + i2k\pi\ .$$ ■