Integração Complexa:

Dada $f:[a,b]\to\mathbb{C}:t\mapsto f(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$.Tem-se que f pode ser interpretada como um caminho em $\mathbb{R}^2$, de modo que

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b \varphi(t)dt+i\int_a^b \psi(t)dt \qquad (1)$$

Caso f seja contínua por partes em $[a,b]$ então

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right|\le\int_a^b |f(t)|dt.$$

Definição: Uma curva plana $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[a,b]\}$, com $\varphi,\psi,\varphi',\psi'$ contínuas e $|\varphi'(t)|+|\psi'(t)|\neq 0$ em $[a,b]$, ou um número finito de tais curvas com os extremos ligados (com exceção do primeiro e do último) é denominada um **caminho** ou **contorno**. Se *C* é fechada sem auto-interseção então *C* é um **caminho fechado simples**.

Definição: Dado um caminho ***C*** e dada $f(z)$ contínua por partes sobre *C*, isto é

$$f:[a,b]\to\mathbb{C}:t\mapsto f(z(t))=f(\varphi(t)+i\psi(t))$$

é contínua por partes. Então, a **integral de caminho** de $f(z)$ sobre *C* é definida como uma integral do tipo (1);

$$\boxed{\int_C f(z)dz=\int_a^b f(z(t))dz(t)=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt=\int_a^b f(\varphi(t)+i\psi(t))(\varphi'(t)+i\psi'(t))dt} \qquad (2)$$

Definição: Dada uma curva plana ***C*** seu comprimento é definido e denotado por

$$|C|=\int_C |dz|=\int_a^b\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_a^b\sqrt{(\varphi'(t)dt)^2+(\psi'(t)dt)^2}=\int_a^b\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt$$

OBS: Se $|f(z)|\le M, \forall z\in C$ e $|C|=L$, então

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\le\int_C|f(z)dz|=\int_C|f(z)||dz|\le M\int_C|dz|=ML. \blacksquare$$

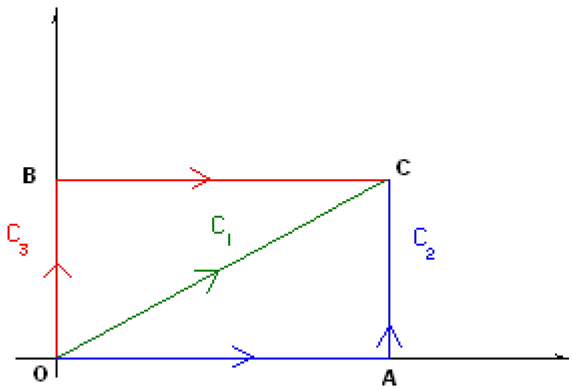
OBS: Em termos das partes real e imaginária de $f(z)$,tem-se que

$$\int_C f(z)dz=\int_C[u(x,y)+iv(x,y)]d(x+iy)=\int_C[u+iv](dx+idy)$$

ou seja

$$\boxed{\int_C f(z)dz=\int_C(udx-vdy)+i\int_C(vdx+udy)} \qquad (3)$$

Exemplo: Vamos usar (2) para calcular a integral de $f(z)=\bar{z}$ ao longo dos três seguintes caminhos;



Onde $O=(0,0), A=(1,0), B=(0,r), C=(1,r)$ sendo r um real positivo qualquer. Tem-se que:

$C_1=\{z(t)=x(t)+iy(t)=t+irt:0\le t\le 1\}$. De modo que,

$$\int_{C_1} f(z)dz=\int_0^1 \overline{z(t)}dz(t)=\int_0^1 \overline{(t+irt)}d(t+irt)=\int_0^1 (t-irt)(1+ir)dt=\int_0^1 (1+r^2)tdt$$
$$=\frac{1+r^2}{2}$$

$C_2=OA\cup AC=\{z(t)=t:0\le t\le 1\}\cup\{z(t)=1+irt:0\le t\le 1\}$. De modo que,

$$\int_{C_2} f(z)dz=\int_{OA}\bar{z}dz+\int_{AC}\bar{z}dz=\int_0^1 tdt+\int_0^1 \overline{(1+irt)}d(1+irt)=\frac{1}{2}+\int_0^1 (1-irt)irdt$$
$$=\frac{1}{2}+\int_0^1 irdt+\int_0^1 r^2tdt=\frac{1}{2}+\frac{r^2}{2}+ir$$

$C_3=OB\cup BC=\{z(t)=irt:0\le t\le 1\}\cup\{z(t)=t+ir:0\le t\le 1\}$. De modo que,

$$\int_{C_3} f(z)dz=\int_{OB}\bar{z}dz+\int_{BC}\bar{z}dz=\int_0^1 \overline{irt}d(irt)+\int_0^1 \overline{(t+ir)}d(t+ir)$$
$$=\int_0^1 (-irt)irdt+\int_0^1 (t-ir)dt=\frac{r^2}{2}+\frac{1}{2}-ir$$

Vale apenas observar que a função $f(z)=\bar{z}$ não é analítica em nenhum ponto.

Exemplo: Por outro lado, a integral da função $f(z)=z$ ao longo de qualquer caminho só depende dos seus valores nas extremidades do caminho. De fato, seja ***C*** um caminho qualquer ligando o ponto z_1 ao ponto z_2. Então, para qualquer representação paramétrica de ***C*** $=\{z(t): a \le t \le b\}$ sempre se tem $z(a)=z_1, z(b)=z_2$. Sendo assim,

$$\int_C f(z)dz = \int_C zdz = \int_a^b z(t)z'(t)dt = \int_a^b \{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[z(t)]^2\}dt = \frac{1}{2}\left(z(t)^2\right]_a^b = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}.$$

Observe que essa função é analítica em todo plano complexo. Em particular se ***C*** for um caminho fechado, então $z_1 = z_2$. Neste caso,

$$\int_C zdz = 0.$$

Definição: Dado o caminho ***C*** $=\{z(t): a \le t \le b\}$,então o mesmo lugar geométrico do plano apenas com o sentido de percurso (orientação) invertida é dado pelo caminho

$$-C = \{w = z(-t): -b \le t \le -a\}.$$

Propriedades:

(P1) $\int_C [\alpha f(z) + g(z)]dz = \alpha \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz \quad , \forall \alpha \in \mathbb{C}$

(P2) $\int_{C_1 \cup C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$

(P3) $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$

OBS: **(P3)**

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))dz(-t) = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))z'(-t)(-dt) \underset{(\tau=-t)}{=} \int_b^a f(z(\tau))z'(\tau)d\tau =$$
$$= -\int_a^b f(z(\tau))z'(\tau)d\tau = -\int_C f(z)dz$$

Teorema de Green: Sejam $P(x,y), Q(x,y)$ funções reais definidas numa região simplesmente conexa $R \subseteq \mathbb{R}^2$, com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em *R*. Então para qualquer caminho fechado simples ***C*** contido em *R*, tem-se que

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_{\mathrm{int}(C)\cup C} (Q_x - P_y)dxdy$$

Teorema de Cauchy: Seja $f(z)$ analítica no interior e sobre um caminho fechado simples ***C***. Então

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 0} \qquad (4)$$

OBS: Demonstração no caso em que se tem $f'(z)$ contínua em $\text{int}(C)\cup C$. Neste caso, tomando $P=u, Q=-v$, obtem-se pelo teorema de Green

$$\oint_C (udx - vdy) = \iint_{\text{int}(C)\cup C} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy$$

Por outro lado, tomando $P=v, Q=u$, obtém-se que

$$\oint_C (vdx + udy) = \iint_{\text{int}(C)\cup C} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$

Como $f(z)$ é analítica em $\text{int}(C)\cup C$ então satisfaz as equações de Cauchy-Riemann;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad em \quad \text{int}(C)\cup C$$

Portanto, utilizando (3) conclui-se que

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy) = 0 \,. \blacksquare$$

OBS: O teorema de Cauchy pode ser aplicado a regiões com um número finito de “furos” (multiplamente conexa). De fato, se a região possuir *n* furos, sejam $C_0, C_1, ..., C_n$ caminhos fechados com $C_i \subset \text{int}(C_0), C_i \cap C_j = \emptyset, i = 1,...,n$. Seja

$$R = \{z \in C_0 \cup \text{int}(C_0) : z \notin \text{int}(C_i), i = 1,...,n\}$$

Tem-se que *R* não é simplesmente conexa, mas introduzindo-se cortes em *R*, obtem-se uma região simplesmente conexa. De fato, sejam os caminhos retilíneos “pontes” P_i ligando cada C_i a C_0. Tem-se que a região delimitada pelo caminho fechado simples

$$C = C_0 \cup P_1 \cup (-C_1) \cup (-P_1) + \cdots + P_n \cup (-C_n) \cup (-P_n)$$

é uma região simplesmente conexa. De modo que, pelo Teorema de Cauchy

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

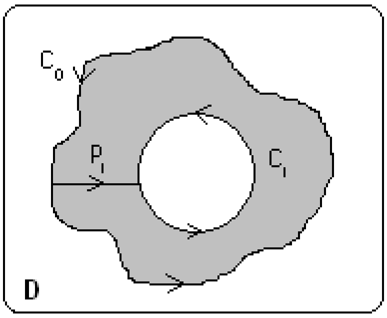
Ou seja

$$\int_{C_0} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z)dz \,. \blacksquare$$

Vejamos a demonstração no caso mais simples.

Teorema: Seja $f:R\to\mathbb{C}$ analítica numa região R com um apenas um "furo". Sejam $C_0, C_1 \subset D$, caminhos fechados simples com $C_1 \subset \operatorname{int}(C_0)$. Então

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz$$



Prova:

Seja P um caminho "ponte" ligando C_0 a C_1, tem-se que

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Onde $C = C_0 \cup P_1 \cup (-C_1) \cup (-P_1)$. Pela propriedade (P2)

$$\int_{C_0} f(z)dz + \int_{P_1} f(z)dz + \int_{-C_1} f(z)dz + \int_{-P_1} f(z)dz = 0$$

Por outro lado, por (P3) obtem-se

$$\int_{C_0} f(z)dz + \int_{P_1} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - \int_{P_1} f(z)dz = 0$$

Logo

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz \qquad \square$$

Este resultado facilita muito o cálculo de integrais sobre caminhos fechados, pois sempre poderemos integrar sobre o caminho fechado simples cuja parametrização é mais fácil;

$$C_r(z_0) = \partial D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\} = \{z(\theta) = z_0 + re^{i\theta} : 0 \le \theta < 2\pi\}.$$

Exemplo: A função $f(z) = (z - z_0)^{-1}$ é analítica em $\mathbb{C} - \{z_0\}$. Seja C um caminho fechado simples envolvendo z_0 apenas uma vez no sentido positivo (anti-horário). Calcule

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)}.$$

Pelo resultado acima,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)}dz = \oint_{C_r(z_0)} \frac{1}{(z-z_0)}dz = \int_0^{2\pi} \frac{d(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i\,.$$

Exemplo: Seja *C* um caminho fechado simples envolvendo z_0 apenas uma vez no sentido positivo (anti-horário). Calcule

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} \qquad ,n \geq 2\,.$$

Tem-se que

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \oint_{C_r(z_0)} \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \int_0^{2\pi} \frac{d(z_0+re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^n} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}d\theta}{r^n e^{in\theta}} = \frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta}d\theta$$

$$= \frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} [\cos(n-1)\theta + i\,\text{sen}(n-1)\theta]d\theta$$

$$= \frac{i}{r^{n-1}}\left[\left(\frac{\text{sen}(n-1)\theta}{(n-1)}\right]_0^{2\pi} + i\left(\frac{-\cos(n-1)\theta}{(n-1)}\right]_0^{2\pi}\right] = 0$$

Conclusão:

$$\boxed{\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & ,se\ n=1 \\ 0 & ,\ se\ n \geq 2 \end{cases}}$$

Definição: Diz-se que $F(z)$ é uma **primitiva** de $f(z)$ se

$$\boxed{F'(z) = f(z)}.$$

Teorema: Seja $f : D \to \mathbb{C}$ analítica num domínio simplesmente conexo *D*. Dados $z_0, z \in D$, então uma primitiva de $f(z)$ possui a seguinte estrutura

$$\boxed{F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\omega)d\omega}$$

Tem-se que a integral independe do caminho *C* ligando z_0 a z ,desde que $C \subset D$. A família de todas as primitivas de $f(z)$ é dada por

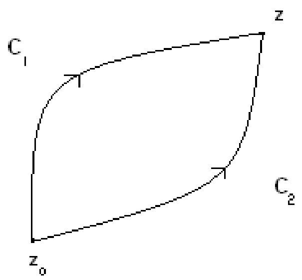
$$\boxed{F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\omega)d\omega + c}$$

Onde $c \in \mathbb{C}$ é uma constante arbitraria. De modo que, continua valendo o **Teorema Fundamental do Cálculo**:

$$\boxed{\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)}$$

Prova da independência do caminho:

Dados $z_0, z \in D$ sejam $C_1, C_2 \subset D$ dois caminhos ligando z_0 a z com $\operatorname{int}(-C_1 \cup C_2) \subset D$



Pelo Teorema de Cauchy, $\oint_{-C_1 \cup C_2} f(z)dz = 0$.

Pelas propriedades (P2) e (P3)

$$\oint_{-C_1 \cup C_2} f(z)dz = \int_{-C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = -\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

De modo que,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \ \blacksquare$$

Exemplo: Calcular $\int_{1+i}^{2+2i} z^2 dz$;

(i) Sobre $C_1 = \{(t, t^2) : 1 \le t \le 2\}$.

(ii) Sobre $C_2 = \{(t, 3t - 2) : 1 \le t \le 2\}$.

Tem-se que

(i)

$$\int_{C_1} z^2dz = \int_1^2 (x(t)+iy(t))^2 d(x(t)+iy(t)) = \int_1^2 (t+it^2)^2 d(t+it^2)$$
$$= \int_1^2 (t^2-t^4+i2t^3)(1+i2t)dt = \int_1^2 [(t^2-t^4-4t^4)+i(2t^3-2t^5+2t^3)]dt$$
$$= \int_1^2 (t^2-5t^4)dt + i\int_1^2 (4t^3-2t^5)dt$$
$$= \frac{t^3}{3}\Big|_1^2 - 5\frac{t^5}{5}\Big|_1^2 + i[4\frac{t^4}{4}\Big|_1^2 - 2\frac{t^6}{6}\Big|_1^2 = (\frac{7}{3})-(2^5-1)+i[(2^4-1)-\frac{1}{3}(2^6-1)]$$
$$= \frac{7}{3}-31+i(15-\frac{63}{3}) = -\frac{86}{3}-i6$$

(ii)

$$\int_{C_2} z^2dz = \int_1^2 (t+i(3t-2))^2 d(t+i(3t-2)) = \int_1^2 (t+i(3t-2))^2(1+i3)dt$$
$$= \int_1^2 [t^2-(3t-2)^2+i2(3t^2-2t)](1+i3)dt$$
$$= \int_1^2 \{(-8t^2+12t-4)-6(3t^2-2t)+i[3(-8t^2+12t-4)+(6t^2-4t)]\}dt$$
$$= -8\frac{t^3}{3}\Big|_1^2 + 12\frac{t^2}{2}\Big|_1^2 - 4t\big|_1^2 - 18\frac{t^3}{3}\Big|_1^2 + 12\frac{t^2}{2}\Big|_1^2 + i[-24\frac{t^3}{3}\Big|_1^2 + 36\frac{t^2}{2}\Big|_1^2 - 12t\big|_1^2 + 6\frac{t^3}{3}\Big|_1^2 - 4\frac{t^2}{2}\Big|_1^2$$
$$= -8(\frac{7}{3})+6(3)-4-18(\frac{7}{3})+6(3)+i[-8(7)+18(3)-12+2(7)-2(3)]$$
$$= -26(\frac{7}{3})+32+i[-56+54-12+14-6] = -\frac{86}{3}-i6$$

Por outro lado, como $f(z)=z^2$ é analítica em $\mathbb{C}$ e como $F(z)=\frac{z^3}{3}$ satisfaz $F'(z)=z^2$, então, pelo TFC

$$\int_{1+i}^{2+i4} z^2dz = F(2+i4)-F(1+i) = \tfrac{1}{3}(2+i4)^3 - \tfrac{1}{3}(1+i)^3 = -\frac{86}{3}-i6$$

OBS:

$$(2+i4)^3 = (2+i4)^2(2+i4) = (-12+i16)(2+i4) = (-24-64-i16) = -88-i16$$
$$(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i) = (2i)(1+i) = -2+i2$$

■

Outras conseqüências do Teorema de Cauchy é que as funções analíticas possuem a "**propriedade da média**", possuem derivada de qualquer ordem que também satisfazem a propriedade da média e são funções analíticas.

Teorema: (Fórmula integral de Cauchy)

Hipóteses: (H1) $f(z)$ analítica em um domínio simplesmente conexo *D*.

(H2) *C* caminho fechado contido em *D*.

(H3) $z_0 \in \operatorname{int}(C)$.

Tese: (T1)

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz}$$

(T2)

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \ \ , \forall n \geq 1}$$

Prova: (T1) Tem-se que

$$f(z) = f(z) - f(z_0) + f(z_0)$$

Logo

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)}\,dz + \frac{f(z_0)}{2\pi i}\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)}\,dz + f(z_0)$$

Agora como $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)}$ é analítica em $D-\{z_0\}$, então tomando um $r>0$ suficientemente pequeno de modo que se tenha $C_r(z_0)=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0| = r\}\subset \operatorname{int}(C)$,obtem-se que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)} \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)}\,dz \, .$$

Como $f(z)$ é analítica em z_0 então é contínua z_0, logo dado $\varepsilon>0$ podemos obter um $\delta>0$,

$\delta=\delta(\varepsilon, z_0)$, tal que, $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ sempre que $|z-z_0|<\delta$. Tomando $0<r<\delta$, então $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon, \forall z \in C_r(z_0)$. De modo que,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)}\frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r(z_0)}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)}\right||dz| = \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r(z_0)}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}|dz| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2\pi r}\oint_{C_r(z_0)}|dz| = \varepsilon$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtém-se que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)}\frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)}dz = 0$$

OBS: A importância das fórmulas integrais de Cauchy, não consiste na determinação de valores de uma função analítica a partir do calculo de integrais, mas sim em utilizar os valores de $f(z)$ e de suas derivadas para calcular integrais. ■

Exemplo: Seja $C=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ e seja $n\in\mathbb{Z}$. Calcule a família de integrais

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^{n+1}}dz .$$

Tem-se que $\cos z$ é analítica em $\mathbb{C}$. Por outro lado, se $n\le -1 \Rightarrow n+1=-m\le 0$,então

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^{n+1}}dz = \oint_C z^m \cos z dz = 0$$

Pois $z^m \cos z$ é analítica em $\mathbb{C}$ se $m\ge 0$.Se $n\ge 0$, podemos utilizar as fórmulas integrais de Cauchy para obter que

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}\left(\frac{d^n}{dz^n}\cos z\right]_{z=0} = \begin{cases} 0 & ,n=2k+1 \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}2\pi i & ,n=2k \end{cases}, k\ge 0 .$$

Exemplo: Seja C um caminho fechado qualquer incluindo os pontos $z_1=i, z_2=-i$. Calcule a integral

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}dz$$

Tem-se que

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right]$$

Logo,

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}dz = \frac{1}{2i}\left[\oint_C \frac{e^z}{z-i}dz - \oint_C \frac{e^z}{z+i}dz\right] = \frac{2\pi i}{2i}\left(e^i - e^{-i}\right) = 2\pi i \,\mathrm{sen}\,1$$

Exemplo: Calcule

$$\oint_{|z|=1} \frac{\log(z^2+2)}{(3z-2)^2}dz\,.$$

Tem-se que qualquer ramo de $\log(z^2+2)$ só não é analítico ao longo das retas verticais: $r_1 : z = i\sqrt{2} + re^{i\pi/2} = i(\sqrt{2}+r), r_2 : z = -i\sqrt{2} + re^{i3\pi/2} = -i(\sqrt{2}+r), r \geq 0$, que estão no exterior de $|z| = 1$. Logo,

$$\oint_{|z|=1} \frac{\log(z^2+2)}{(3z-2)^2}dz = \oint_{|z|=1} \frac{\log(z^2+2)}{9(z-(2/3))^2}dz = \frac{2\pi i}{9}\frac{d}{dz}\left(\log(z^2+2)\right]_{z=2/3} = \frac{2\pi i}{9}\left(\frac{2z}{z^2+2}\right]_{z=2/3}$$

$$= \frac{2\pi i}{9}\left(\frac{4/3}{(2/3)^2+2}\right)$$

Séries de Taylor:

As funções analíticas podem ser caracterizadas como funções que podem ser desenvolvidas em séries de potências.

Teorema: Toda série de potências

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_n)^n}$$

Representa uma função analítica $f(z)$ no seu disco de convergência $|z - z_0| < r$. Ela pode ser derivada termo a termo qualquer número de vezes e as séries assim obtidas possuem o mesmo raio de convergência e representam as respectivas derivadas de $f(z)$. Obtem-se então que

$$\boxed{a_0 = f(z_0) \;\; , a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \forall n \geq 1}.$$

Teorema: Seja $f(z)$ uma função analítica num domínio D, $z_0 \in D$ e $r > 0$ tal que o disco $D_r(z_0) : |z - z_0| < r$ está contido em D. Então, neste disco $f(z)$ pode ser desenvolvida em série de potências de $(z\text{-}z_0)$, denominada ***Série de Taylor*** de $f(z)$ relativa ao ponto z_0, dada por

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n}$$

O caso z_0=0 é conhecido como série de **MacLaurin.**

Pela Fórmula Integral de Cauchy tem-se que

$$\boxed{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \forall C \subset D_r(z_0)}.$$

Exemplo: Obter a série de Taylor de $f(z) = e^z$ em $z_0 = 0$.

Conforme sabemos $f(z)$ é analítica em todo $\mathbb{C}$ e tem-se que $f'(z) = e^z$ logo $f^{(n)}(z) = e^z, \forall n \geq 1$. De modo que, sua série d Taylor em $z_0 = 0$ (série de MacLaurin) é

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad , |z| < \infty}.$$

Exemplo: Obter a série de Taylor de $f(z) = e^{z^2}$ em $z_0 = 0$.

Tem-se que

$$f'(z)=2ze^{z^2} \Rightarrow f''(z)=2e^{z^2}+(2z)^2e^{z^2} \Rightarrow f'''(z)=2^2ze^{z^2}+2^3ze^{z^2}+(2z)^3e^{z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(z)=2^2e^{z^2}+2^3z^2e^{z^2}+2^3e^{z^2}+2^4z^2e^{z^2}+3.2^3z^2e^{z^2}+\cdots \Rightarrow \begin{cases} f^{(2n)}(0)=(2n)!/\,n! \\ f^{(2n+1)}(0)=0 \end{cases}, \forall n \geq 0.$$

Logo $$e^{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}z^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!} \quad ,|z|<\infty.$$

Exemplo: Obter as séries de Taylor de cos z e sen z em $z_0=0$

Tem-se que cos z e sen z são analíticas em $\mathbb{C}$ com

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$$\cos z=\cosh y.\cos x-i\,\mathrm{senh}\,y.\mathrm{sen}\,x \qquad \text{e} \qquad \mathrm{sen}\,z=\cosh y.\mathrm{sen}\,x+i\,\mathrm{senh}\,y.\cos x$$

Então

$$(\cos z)'=u_x+iv_x=-\cosh y.\mathrm{sen}\,x-i\,\mathrm{senh}\,y.\cos x=-\mathrm{sen}\,z$$

$$(\mathrm{sen}\,z)'=v_y+i(-u_y)=\cosh y.\cos x-i\,\mathrm{senh}\,y.\mathrm{sen}\,x=\cos z$$

De modo que,

$$(\cos z)^{(n)}=\begin{cases}(-1)^k\cos z & ,n=2k \\ (-1)^k\,\mathrm{sen}\,z & ,n=2k+1\end{cases}, k\geq 0 \Rightarrow \left((\cos z)^{(n)}\right]_{z=0}=\begin{cases}(-1)^k, n=2k \\ 0\ , n=2k+1\end{cases}$$

$$(\mathrm{sen}\,z)^{(n)}=\begin{cases}(-1)^k\,\mathrm{sen}\,z & ,n=2k \\ (-1)^k\cos z, & n=2k+1\end{cases}, k\geq 0 \Rightarrow \left((\mathrm{sen}\,z)^{(n)}\right]_{z=0}=\begin{cases}0 & ,n=2k \\ (-1)^k, & n=2k+1\end{cases}$$

Logo, para

$$\boxed{\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\mathrm{sen}\,z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

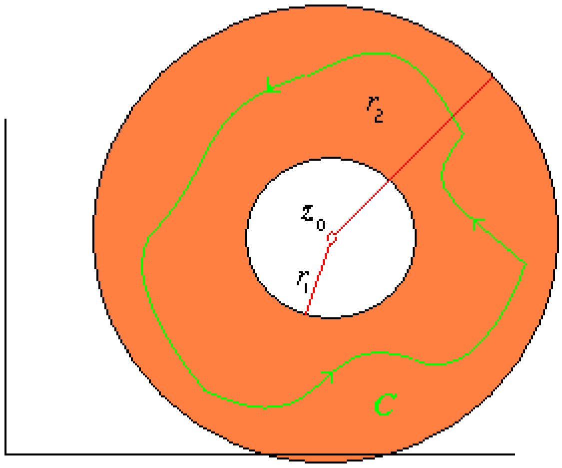
Generalização da Série de Taylor:

Se $f(z)$ é analítica em $A_{r_1}^{r_2} : 0 < r_1 < |z - z_0| < r_2$ ela pode ser representada pela ***Série de Laurent*** em $A_{r_1}^{r_2}$:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}$$

onde para todo caminho fechado anti-horário $C \subset A_{r_1}^{r_2}$ tem-se que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad , n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$



Tem-se que

$$\boxed{f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{parte\ principal} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{parte\ analítica}}$$

OBS: A parte analítica é uma função analítica em $|z - z_0| < r_2$

A parte singular é uma função analítica em $|z - z_0| > r_1$. ■

Definição: Um ***ponto singular*** de $f(z)$ é um ponto z_0 no qual $f(z)$ não é analítica. Se existe uma vizinhança de z_0 aonde $f(z)$ deixa de ser analítica apenas no ponto z_0 então z_0 é um ***ponto singular isolado***.

Propriedade: Se z_0 é um ponto singular isolado de uma função analítica $f(z)$ então existe $r_0 > 0$ tal que

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad ,0<|z-z_0|<r_0}$$

Exemplo: $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ possui $z_1=i, z_2=-i$ como pontos singulares isolados.

Definição: Um ponto singular isolado z_0 é um ***pólo de ordem m*** de $f(z)$ se

$$a_{-m}\neq 0 \quad e \quad a_{-n}=0, \forall n>m.$$

Um pólo de ordem 1 é denominado ***pólo simples***.

OBS: Se z_0 é um pólo simples então, existe $r_0 > 0$ tal que;

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad ,0<|z-z_0|<r_0,\ a_{-1}\neq 0. \ \blacksquare$$

Definição: Um ponto singular isolado z_0 é uma ***singularidade essencial*** ou ***pólo de ordem infinita*** de $f(z)$ quando a parte principal de $f(z)$ possui um número infinito de termos.

Exemplo: A origem $z_0=0$ é uma singularidade essencial da função

$$f(z)=e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/z)^n}{n!}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots, |z|>0.$$

Exemplo: A origem $z_0=0$ é um pólo de 2ª ordem da função

$$\frac{\cos z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}=\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots, |z|<\infty$$

Exemplo: A seguinte função não é analítica na origem

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots, |z|<\infty$$

Entretanto, conforme se vê, a origem é uma falsa singularidade e pode-se definir o valor da função em $z_0 = 0$ como sendo 1.Neste caso, diz-se que a origem é uma ***singularidade removível***.

OBS: Se $f(z)$ possui um pólo de ordem m em z_0, então

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad ,0<|z-z_0|<r$$

com $a_{-m}\neq 0$. Logo,

$$\boxed{\varphi(z)=(z-z_0)^m f(z) \ ,0<|z-z_0|<r}$$

possui z_0 como singularidade removível e portanto pode ser estendida analiticamente à z_0 definindo-se :

$$\boxed{\varphi(z_0)=a_{-m}}$$

Por outro lado,

$$\varphi(z)=a_{-m}+a_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \ ,|z-z_0|<r.$$

De modo que,

$$\boxed{a_{-1}=\frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi^{(m-1)}(z)}{(m-1)!}.} \qquad ■$$

Definição: O coeficiente a_{-1} na expansão de Laurent de $f(z)$ é denominado ***resíduo de f(z)*** no ponto singular isolado z_0. (Notação: *Res(f (z); z_0)*)

Pela definição de Série de Laurent tem-se que

$$\boxed{\text{Res}(f(z);z_0)=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz}$$

Exemplo: Res(©$^{1/z}$;0)=1.

OBS: Conforme vimos se $f(z)$ possui pólo de ordem m em z_0 então

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad ,0<|z-z_0|<r$$

Integrando sobre uma curva fechada $C\subset D(f)$ e usando que

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^m}=\begin{cases}0, & m\neq 1\\ 2\pi i, & m=1\end{cases} \qquad (*)$$

Obtem-se que

$$\oint_C f(z)dz = a_{-m}\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^m} + \cdots + a_{-1}\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_C (z-z_0)^n dz$$
$$= a_{-1} 2\pi i$$

$$(*): Seja\ r_1 > 0 \text{ tq. } D_{r_1}(z_0) \subset C \Rightarrow \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^m} = \oint_{|z-z_0|=r_1} \frac{dz}{(z-z_0)^m}$$

$$Em\ |z-z_0| = r_1;\ z-z_0 = r_1 e^{i\theta}, 0 \le \theta < 2\pi \Rightarrow z = z_0 + r_1 e^{i\theta} \Rightarrow dz = i r_1 e^{i\theta} d\theta$$

$$\oint_{|z-z_0|=r_1} \frac{dz}{(z-z_0)^m} = \int_0^{2\pi} \frac{i r_1 e^{i\theta}}{(r_1 e^{i\theta})^m} d\theta = \frac{i}{r_1^{m-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-m)\theta} d\theta =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(1-m) r_1^{m-1}} \left(\cos(1-m)\theta + i\,\text{sen}(1-m)\theta\right]_0^{2\pi}, m \ne 1 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i, m = 1 \end{cases}$$

■

Teorema dos Resíduos:

Hip: $f(z)$ analítica dentro e sobre um caminho fechado C, exceto em número finito de

polos z_1, ... , z_k.

Tese:

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Res}(f(z); z_j)}$$

Exemplo: Seja C um caminho fechado com $\pm\pi i \in int(C)$. Calcule

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{z^2+\pi^2} dz$$

Pontos singulares; pólos de 1ª ordem em $z_1 = \pi i$, $z_2 = -\pi i$.

Resíduos: em z_1;

$$\varphi(z) = (z - i\pi) f(z) = \frac{e^{-z}}{(z+i\pi)} \Rightarrow a_{-1} = \frac{\varphi(i\pi)}{0!} = \frac{e^{-i\pi}}{2\pi i} = \frac{i}{2\pi} \Rightarrow \text{Res}(f(z); i\pi) = \frac{i}{2\pi}$$

Em z_2;

$$\varphi(z) = (z + i\pi) f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-i\pi)} \Rightarrow a_{-1} = \varphi(-i\pi) = \frac{e^{i\pi}}{-2\pi i} = \frac{-i}{2\pi} \Rightarrow \text{Res}(f(z); -i\pi) = -\frac{i}{2\pi}$$

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{z^2+\pi^2} dz = 2\pi i\left[\text{Res}(f(z); i\pi) + \text{Res}(f(z); -i\pi)\right] = 2\pi i\left[\frac{i}{2\pi} + (-\frac{i}{2\pi})\right] = 0$$

Se $\pm\pi i \notin int(C)$, então $f(z)$ é analítica em $int(C)$. De modo que,

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{z^2+\pi^2} dz = 0$$