Fórmula Complexa de Inversão

Agora possuímos o ferramental matemático necessário para obtermos a inversão efetiva da transformada de Laplace. A inversão é obtida através da ***Fórmula Integral de Bromwich***.

Definição: Se F(s) = $\mathscr{L}[f\,(t)](s)$, então

$$\boxed{f\,(t) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zt}F(z)dz \quad ,\forall t>0} \qquad \textit{(FI)}$$

OBS: Tem-se que

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f\,(t)dt\,.$$

"Complexificando" a variável independente, ou seja, fazendo $s = z = x+iy$, obtem-se que

$$\begin{aligned}F(z) &= \int_0^\infty e^{-(x+iy)t}f\,(t)dt = \int_0^\infty (e^{-xt}\cos yt - ie^{-xt}\,\mathrm{sen}\, yt)\,f\,(t)dt\\ &= \int_0^\infty f\,(t)e^{-xt}\cos ytdt - i\int_0^\infty f\,(t)e^{-xt}\,\mathrm{sen}\, ytdt\\ &= u(x,y)+iv(x,y)\end{aligned}$$

Como $f \in \mathscr{E}$ então $\exists C>0, \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq.

$$|\,f\,(t)| \le Ce^{\alpha t}, \forall t>0 \Rightarrow \begin{cases}\left|\int_0^\infty f\,(t)e^{-xt}\cos ytdt\right|\\ \left|\int_0^\infty f\,(t)e^{-xt}\,\mathrm{sen}\, ytdt\right|\end{cases} \le C\int_0^\infty e^{-(x-\alpha)t}dt \le \frac{C}{x-\alpha}\ ,\forall x>\alpha.$$

Logo, u e v estão bem definidos na faixa $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) > \alpha$. Por outro lado, usando Leibniz

$$u_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty f\,(t)e^{-xt}\cos ytdt = \int_0^\infty -tf\,(t)e^{-xt}\cos ytdt$$

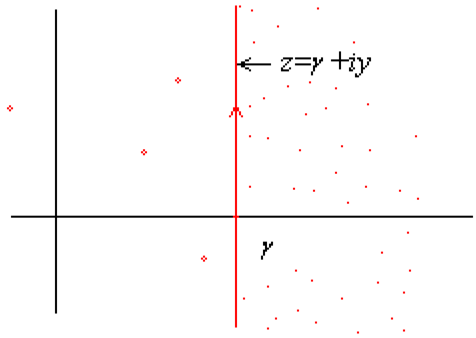
$$u_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty f\,(t)e^{-xt}\cos ytdt = \int_0^\infty -tf\,(t)e^{-xt}\,\mathrm{sen}\, ytdt$$

$$v_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty f\,(t)e^{-xt}\,\mathrm{sen}\, ytdt = \int_0^\infty -tf\,(t)e^{-xt}\,\mathrm{sen}\, ytdt$$

$$v_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\int_0^\infty f\,(t)e^{-xt}\,\mathrm{sen}\, ytdt\right) = -\int_0^\infty tf\,(t)e^{-xt}\cos ytdt$$

De modo que, u_x,u_y,v_x e v_y são contínuas em $]\alpha,\infty[\times\mathbb{R}$ e satisfazem as equações de ***Cauchy-Riemann***. Portanto, F(z) é analítica em $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) > \alpha$. $\int$

(FI) é o método direto para obtenção de $\mathscr{L}^{-1}[F(z)](t)$. A integração é efetuada ao longo da reta $\mathbb{R}\text{e}(z) = \gamma$, onde γ é tal que as singularidades de $F(z)$ estão à esquerda de $\mathbb{R}\text{e}(z) = \gamma$.



Origem da Fórmula *(FI)*: Trata-se de uma generalização da Fórmula Integral de Cauchy para retas $\mathbb{R}\text{e}(z) = \gamma$ no caso em elas são a fronteira do semi-plano aonde $f(z)$ é analítica. Para isso necessitaremos ter alguma informação sobre o comportamento de $f(z)$ para $|z|$ arbitrariamente grande.

Definição: $f(z)$ é de ordem z^k quando $|z|\to\infty$, se $\exists M, r_0 > 0$ tais que;

$$|f(z)| < M|z|^k \quad , se \ |z| > r_0.$$

Notação: $f(z) = O(z^k)$.

Teorema: (*Integral Imprópria de Cauchy*)

Hip: $f(z)$ analítica sobre o semi-plano $\mathbb{R}\text{e}(z) \geq \gamma$ e $f(z) = O(z^{-k})$, $k > 0$.

Tese: Se $\mathbb{R}\text{e}(z_0) > \gamma$, então

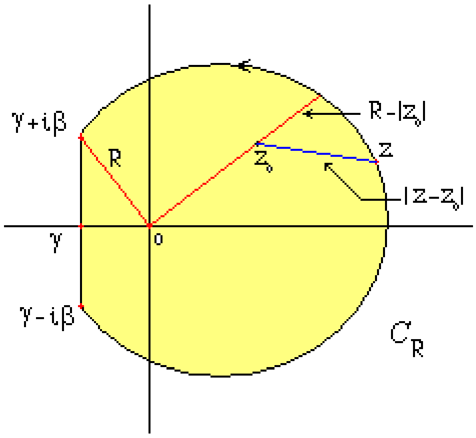
$$\boxed{f(z_0) = -\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = -\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\gamma+iy)}{(\gamma+iy-z_0)}dy}$$

De modo que, se $F(z)$ é analítica em $\mathbb{R}\text{e}(z) \geq \gamma$, $F(z) = O(z^{-k})$, $k > 0$, $|z| >> 1$, tem-se que

$$\boxed{F(\omega) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(z)}{(\omega-z)}dz \qquad ,\forall\omega\in\mathbb{C}, \mathbb{R}e(\omega) > \gamma.}$$

Prova:

Seja C_R o arco: $x \geq \gamma$ do círculo $|z| = R$, onde $R > |\gamma|$ e $R > |z_0|$. De modo que, $z_0 \in int(C_R \cup \{x = \gamma\})$. Definindo $\beta = (R^2 - \gamma^2)^{1/2}$ tem-se, pela Fórmula Integral de Cauchy, que



$$f(z_0)=\tfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_R\cup\{x=\gamma\}}\frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz=\tfrac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz+\int_{\gamma+i\beta}^{\gamma-i\beta}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz\right)=\tfrac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz-\int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz\right)$$

Quando $z\in C_R$ tem-se que ; $|z-z_0|\ \geq$R-6 z_0 6e como $|f(z)|<M|z|^{-k}$, então se $|z|=R$, R suficientemente grande ($R>>1$), obtem-se que

$$\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|\leq\frac{M}{|z|^k}\frac{1}{|z-z_0|}\leq\frac{M}{R^k}\frac{1}{(R-|z_0|)}$$,se $R>r_0$,p/algum $r_0>>1$.

Os integrandos em $f(z_0)$ na expressão acima são contínuos. O comprimento de C_R é menor que $2\pi R$. Portanto, como

$$\left|\oint_C f(z)dz\right|\leq\oint_C|f(z)||dz|\leq ML\Rightarrow\left|\oint_{C_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz\right|\leq\frac{M}{R^k(R-|z_0|)}2\pi R=\frac{2\pi M}{R^k(1-|z_0|/R)}\to 0$$

Quando $R\to\infty$, pois $k>0$. Além disso, como $R^2=\beta^2+\gamma^2$ a integral tb. converge para 0 quando $\beta\to+\infty$. De modo que, tomando o limite $\beta\to+\infty$ obtem-se que

$$f(z_0)=-\tfrac{1}{2\pi i}\lim_{\beta\to\infty}\int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz=-\tfrac{1}{2\pi i}\lim_{\beta\to\infty}\int_{-\beta}^{\beta}\frac{f(\gamma+iy)}{(\gamma+iy-z_0)}dy=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\gamma+iy)}{(\gamma+iy-z_0)}dy$$

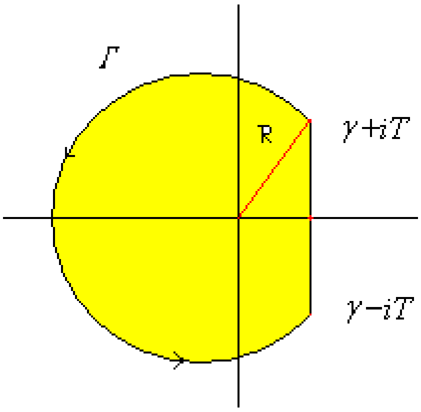
Então, procedendo formalmente, obtem-se que

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)](t)=\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(z)}{(s-z)}dz](t)=\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(z)\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-z}](t)dz$$
$$=\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(z)e^{zt}dz$$

Contorno de Bromwich: Na prática a integral em *(FI)* é transformada numa integral de contorno

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_B} e^{zt}F(z)dz}$$

onde $C_B = \Gamma \cup \{\mathbb{R}\mathrm{e}\ z = \gamma\}$é o contorno de Bromwich;



Tem-se que $T = (R^2 - \gamma^2)^{1/2}$ donde $T \to \infty$ se sé se $R \to \infty$, donde

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{zt}F(z)dz = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_B} e^{zt}F(z)dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{zt}F(z)dz\right)$$

OBS: **Condição suficiente** para que a integral sobre Γ convirja para zero quando $R \to \infty$:

$$\boxed{F(z) = O(z^{-k})} \quad (\textbf{CS})$$

para algum $k > 0$. Esta condição sempre ocorre quando, por exemplo, $F(z) = p(z)/q(z)$, para p e q polinômios com grau(p) < grau(q).

Aplicação do teorema dos Resíduos à Inversão da Transformada de Laplace:

Se as singularidades de $F(z)$ são pólos (ordem finita) à esquerda de uma reta $\mathbb{R}e(z)=$ e, além disso, tivermos

$$\int_{\Gamma} e^{zt} F(z)dz \to 0,\ qdo.\, R \to +\infty$$

no contorno de Bromwich, então

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Re}s(e^{zt}F(z) : z_k)\ \ , z_k = \textit{pólo de } F(z).$$

Exemplo: Calcule

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}](t) \quad , a \in \mathbb{R}.$$

Tem-se que $F(s) = p(s)/q(s)$ com a pólo simples e grau(p)=0 < 1=grau(q). Então F atende a condição suficiente (***CS***), donde

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}](t) = \operatorname{Re}s(\frac{e^{zt}}{z-a} : a) = a_{-1} = \varphi(a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{e^{zt}}{z-a} = e^{at}.$$

Exemplo: Calcule

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}](t).$$

Tem-se que F atende (CS), donde

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}](t) = \sum_k \operatorname{Re}s(\frac{e^{zt}}{(z+1)(z-2)^2} : z_k)$$

Polos de $e^{zt} F(z)$:

$$z_1 = -1\ (ordem\ 1) \Rightarrow \operatorname{Re}s(e^{zt}F(z) : -1) = a_{-1} = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{e^{zt}}{(z+1)(z-2)^2} = \frac{e^{-t}}{9}$$

$$z_2 = 2\ (ordem\ 2) \Rightarrow \operatorname{Re}s(e^{zt}F(z) : 2) = a_{-1} = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}[(z-2)^2\frac{e^{zt}}{(z+1)(z-2)^2}]$$

$$= \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}(\frac{e^{zt}}{z+1}) = \lim_{z\to 2}\left[\frac{te^{zt}(z+1) - e^{zt}}{(z+1)^2}\right] = (\frac{t}{3} - \frac{1}{9})e^{2t}$$

Assim,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}](t) = (t-\tfrac{1}{3})\frac{e^{2t}}{3}.$$

Exemplo: Calcule $\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}](t)$.

Polos de $\dfrac{ze^{zt}}{(z+1)^3(z-1)^2}$:

$$z_1 = -1\ (ordem\ 3) \Rightarrow \operatorname{Re}s(e^{zt}F(z):-1) = \lim_{z\to -1} \tfrac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}[\frac{ze^{zt}}{(z-1)^2}] = a_{-1} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}[\frac{(1+tz)e^{zt}(z-1)^2 - ze^{zt}2(z-1)}{(z-1)^4}] = \tfrac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}[\frac{(1+tz)e^{zt}(z^2-2z+1) - e^{zt}(2z^2-2z)}{(z-1)^4}] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}[\frac{(z^3-2z^2+z)te^{zt} + e^{zt}(1-z^2)}{(z-1)^4}] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\lim_{z\to -1}\left(\frac{[(2+zt)(z-1)^2te^{zt} - 2ze^{zt}](z-1)^4 - e^{zt}[(1-z^2)+tz(z-1)^2]4(z-1)^3}{(z-1)^8}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{[(2-t)4te^{-t} + 2e^{-t}]2^4 - e^{-t}[-4t]4(-2^3)}{2^8}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2^6(2-t)te^{-t} + 2^5e^{-t} - 2^7te^{-t}}{2^8}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(2-t)te^{-t}}{2^2} + \frac{e^{-t}}{2^3} - \frac{te^{-t}}{2}\right) = \frac{te^{-t}}{2^2} - \frac{t^2e^{-t}}{2^3} + \frac{e^{-t}}{2^4} - \frac{te^{-t}}{2^2} = (\frac{1}{2^4} - \frac{t^2}{2^3})e^{-t}.$$

$$z_2 = 1 (ordem 2) \Rightarrow \operatorname{Re}s(e^{zt}F(z):1) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[\frac{ze^{zt}}{(z+1)^3}] = \lim_{z\to 1}[\frac{(e^{zt}+tze^{zt})(z+1)^3 - 3ze^{zt}(z+1)^2}{(z+1)^6}] =$$

$$= \frac{2^3(1+t)e^t - 3.2^2e^t}{2^6} = \frac{(1+t)}{2^3}e^t - \frac{3}{2^4}e^t = (2t-1)\frac{e^t}{2^4}.$$

De modo que,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}](t) = \frac{1}{2^3}(\frac{1}{2} - t^2)e^{-t} + \frac{1}{2^4}(2t-1)e^t.$$

Exemplo: Calcule

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s^2+1)^2}](t).$$

OBS:

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s+i)^2(s-i)^2} \qquad ■$$

Pólos de $\dfrac{e^{zt}}{(z+i)^2(z-i)^2}$:

$$z_1=-i\ (ordem2)\Rightarrow \operatorname{Re}s(e^{zt}F(z):-i)=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}[\frac{e^{zt}}{(z-i)^2}]=\lim_{z\to -i}[\frac{te^{zt}(z-i)^2-2e^{zt}(z-i)}{(z-i)^4}]$$

$$=\frac{-4te^{-it}+4ie^{-it}}{2^4}=-t(\cos t-i\operatorname{sen}t)+i(\cos t-i\operatorname{sen}t)=(-t\cos t+sent)+i(\cos t+t\operatorname{sen}t)$$

$$z_2=i\ (ordem2)\Rightarrow \operatorname{Re}s(e^{zt}F(z):i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[\frac{e^{zt}}{(z+i)^2}]=\lim_{z\to i}[\frac{te^{zt}(z+i)^2-2e^{zt}(z+i)}{(z+i)^4}]$$

$$=\frac{-4te^{it}-4ie^{it}}{4^2}=\frac{-1}{4}[t(\cos t+i\operatorname{sen}t)+i(\cos t+i\operatorname{sen}t)]=\frac{-1}{4}[(t\cos t-\operatorname{sen}t)+i(t\operatorname{sen}t+\cos t)]$$

Logo,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s^2+1)^2}](t)=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}t-t\cos t].$$

Funções Plurívocas e Pontos de Ramificações:

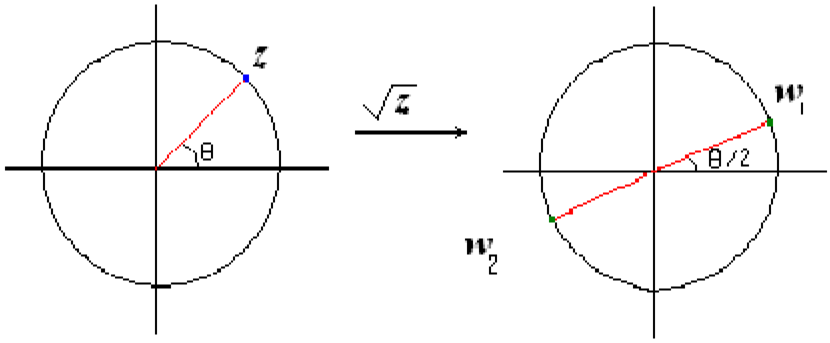
Dado $z\neq 0$, a função

$$f(z)=\sqrt{z}=\sqrt{|z|}(\cos\tfrac{\theta}{2}+i\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2})\qquad ,\theta=\operatorname{Arg}z$$

associa a cada z dois valores distintos ω_1,ω_2;

$$\omega_1=\sqrt{|z_1|}(\cos\tfrac{\theta}{2}+i\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2})\ \ ,\omega_2=\sqrt{|z_1|}[\cos(\tfrac{\theta}{2}+\pi)+i\operatorname{sen}(\tfrac{\theta}{2}+\pi)]$$

De modo que, $\sqrt{z}$ não é uma função unívoca (ou seja, univalente). Ela é uma função multívoca a dois valores (bivalente).



plano z *plano w*

Definição: Um ***ramo*** de uma função multivalente f é uma função univalente que é analítica em alguma região e cujos valores em cada ponto dessa região coincidem com os valores de f.

Exemplo: A função

$$f_1(z)=\sqrt{|z|}(\cos\tfrac{\theta}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\theta}{2}) \qquad ,-\pi<\theta<\pi$$

é um ramo da função $f(z)=\sqrt{z}$. A região de analiticidade de f_1 é $\mathbb{C}-\{z=re^{i\pi}:r>0\}$

Tem-se que no eixo-real negativo $]-\infty,0[$, f_1 nem sequer é contínua uma vez que ;

$$se\ \theta\to\pi^-\Rightarrow f_1(z)\to i\sqrt{r}\ ,e\ se,\ \theta\to-\pi^+\Rightarrow f_1(z)\to -i\sqrt{r}\ ,\forall z=re^{i\theta}.$$

De modo que,

$$\nexists\lim_{z\to\rho} f_1(\rho)\ \ ,\forall\rho<0.$$

Definição: O eixo-real negativo $\{z=re^{i\pi}:r>0\}$ é denominado um ***corte da ramificação*** de f(z)=$\sqrt{z}$ e a origem é um ***ponto de ramificação*** de f(z)=$\sqrt{z}$.

OBS: Todo os pontos do semi-eixo $\{z=re^{i\pi}:r>0\}$ são pontos singulares de $\sqrt{z}$, e portanto são **pontos singulares não são isolados**.

A função

$$f_2(z)=\sqrt{|z|}\left(\cos\tfrac{\tilde\theta}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\tilde\theta}{2}\right)\quad ,\pi<\tilde\theta<3\pi,|z|>0$$

é um segundo ramo de $\sqrt{z}$. Tem-se que, $\forall\theta\in]-\pi,\pi[$;

$$f_2(z)=\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{(\theta+2\pi)}{2}+i\,\mathrm{sen}\frac{(\theta+2\pi)}{2}\right)=\sqrt{|z|}\left(\cos(\tfrac{\theta}{2}+\pi)+i\,\mathrm{sen}(\tfrac{\theta}{2}+\pi)\right)$$
$$=\sqrt{|z|}\left(-\cos\tfrac{\theta}{2}-i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\theta}{2}\right)=-f_1(z)$$

Na verdade, existe um número infinito (enumerável) de ramos dados por

$$f_{k+1}(z)=\sqrt{|z|}\left(\cos\tfrac{\theta}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\theta}{2}\right)\quad,(2k-1)\pi<\theta<(2k+1)\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

OBS: Pode-se usar qualquer outra semi-reta $\{z=re^{i\phi}:r>0\}$ como corte de ramificação. Neste caso, os ramos podem ser dados por

$$f_{k+1}(z)=\sqrt{|z|}\left(\cos\tfrac{\theta}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\theta}{2}\right)\quad,(2k-1)\pi+\phi<\theta<(2k+1)\pi+\phi,k\in\mathbb{Z}.$$

Vamos relembrar a seguinte

Definição: $\forall z\neq 0$,o ***k-ésimo ramo da função logaritmo de z*** é dado por

$$\log_k z=\log|z|+i\arg z\quad,(2k-1)\pi<\arg z<(2k+1)\pi.$$

A função ***valor principal*** de log z é dado por

$$Log z=\log|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z$$

onde Arg z é o argumento principal de

$$z\neq 0;-\pi<\mathrm{Arg}\,z<\pi$$

OBS:

$$\log z=\log(re^{i\theta})=\log r+\log(e^{i\theta})=\log r+i\theta.$$

Definição: A função multivalente Logaritmo de um número complexo z é uma família infinita enumerável de funções dada por todos os ramos;

$$\mathbb{L}\mathrm{og}\,z=\{\log_k z:k\in\mathbb{Z}\}=\{\log|z|+i\arg z+i2k\pi:k\in\mathbb{Z}\}.$$

Propriedades:

(P1) $\mathbb{L}\mathrm{og}\,z$ é descontínua sobre o corte $\{z=re^{i\pi}:r>0\}$.

(P2) $\mathbb{L}\mathrm{og}\,z$ é analítica $\forall z\notin\{z=re^{i\pi}:r>0\}$ e $\frac{d}{dz}\log_k z=\frac{1}{z},\forall k\in\mathbb{Z}.$

(P3) Um ramo difere de qualquer outro por um múltiplo inteiro de $2\pi i$.

Com isto podemos definir a seguinte função que esclarecerá porque a função $\sqrt{z}$ não pode ser definida em $z = 0$.

Definição: $\forall z \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{C}$, defini-se a função z^{ω} como sendo a coleção infinita enumerável de todos os ramos

$$(z^{\omega})_k \triangleq e^{\omega \log_k z} \quad , (2k-1)\pi < \arg z < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

O valor principal de z^{ω} é dado pela função

$$z^{\omega} = e^{\omega \operatorname{Log} z}, z \neq 0.$$

Propriedades: $\forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ e um particular ramo $\log_k z$;

(P1) z^{ω} é analítica onde $\log_k z$ é analítica.

(P2) $\dfrac{d}{dz} z^{\omega} = \omega z^{\omega - 1}$.

(P3) $z^{\omega_1 + \omega_2} = z^{\omega_1} z^{\omega_2}$.

(P4) $(z_1 z_2)^{\omega} = z_1{}^{\omega} z_2{}^{\omega} e^{(2k\pi i)\omega}$, p/ algum $k \in \mathbb{Z}$.

(P5) $z^{-\omega} = \dfrac{1}{z^{\omega}}$.

Aplicação ao calculo de integrais:

Exemplo: Calcule a família de integrais impróprias

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad , 0 < p < 1.$$

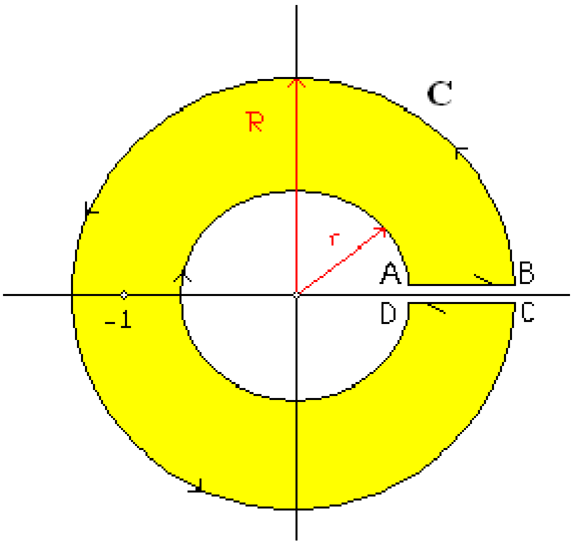
Complexificando o integrando obtem-se a função

$$f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z} = \frac{1}{(1+z)z^{p-1}} \quad , 0 < 1-p < 1.$$

Então, sobre o semi-eixo $\{z = re^{2\pi i} : r > 0\}$

$$z^{1-p} = e^{(1-p)\log z} = e^{(1-p)[\log|z| + i2k\pi]} = e^{(1-p)\log|z|} e^{i(1-p)2k\pi}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

De modo que, $z = 0$ é ponto de ramificação. Tomando como corte de ramificação o semi-eixo $\{z = re^{2\pi i} : r > 0\}$ e integrando $f(z)$ sobre o seguinte contorno fechado



Tem-se que o integrando possui um pólo simples em $z = -1 \in \mathrm{int}(C)$ com

$$\mathrm{Re}\, s(f(z):-1) = \lim_{z \to -1} (z+1) \frac{z^{p-1}}{(z+1)} = (-1)^{p-1} = (e^{i\pi})^{p-1} = e^{i(p-1)\pi}$$

Aplicando o Teorema dos Resíduos, obtem-se que

$$\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 2\pi i e^{i(p-1)\pi}.$$

Por outro lado, tem-se que

$$\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = \int_{AB} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_{BC} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_{CD} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_{DA} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz$$

OBS: Sobre $\{z = re^{2\pi i} : r > 0\}$ tem-se que, $z = xe^{i \arg z} = \begin{cases} x \text{ ,sobre } AB \\ xe^{2\pi i} \text{,sobre } CD \end{cases}$

■

Sendo assim, obtem-se que

$$\int_r^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{p-1}}{1+Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta + \int_R^r \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(re^{i\theta})^{p-1}}{1+re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

OBS:

$$\left|\frac{(R\,e^{i\theta})^{(p-1)}iR\,e^{i\theta}}{1+R\ e^{i\theta}}\right|=\frac{\left|e^{(p-1)\log R+i(p-1)\theta}\right|\left|iR\,e^{i\theta}\right|}{\left|1+R\,e^{i\theta}\right|}=\frac{e^{\log R^{(p-1)}}\left|e^{i(p-1)\theta}\right|R\left|ie^{i\theta}\right|}{\left|1+R\,e^{i\theta}\right|}\leq\frac{R^{p}}{\left|Re^{i\theta}\right|-1}=\frac{R^{p}}{R-1}\leq$$

$$\leq\frac{M}{R^{1-p}}\quad ,\text{para}\quad R\geq\frac{M}{M-1},\forall M>1.$$

■

Como se tem

$$\int_{2\pi}^{0}\frac{(re^{i\theta})^{p-1}ire^{i\theta}}{1+re^{i\theta}}d\theta=ir^{p}\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{ip\theta}}{1+re^{i\theta}}\,d\theta\ ;\text{onde }\left|1+re^{i\theta}\right|=\left|1-(-re^{i\theta})\right|\geq 1-r,\text{se } r<1.$$

Então

$$\left|\int_{0}^{2\pi}\frac{(Re^{i\theta})^{p-1}iRe^{i\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta\right|\leq\int_{0}^{2\pi}\frac{M}{R^{1-p}}\,d\theta=\frac{2\pi M}{R^{1-p}}\to 0, qdo.\ R\to+\infty.$$

e

$$\left|\int_{2\pi}^{0}\frac{ie^{ip\theta}}{1+re^{i\theta}}\,d\theta\right|=\left|\int_{0}^{2\pi}\frac{ie^{ip\theta}}{1+re^{i\theta}}\,d\theta\right|\leq\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{\left|1+re^{i\theta}\right|}d\theta\leq\frac{1}{1-r}\int_{0}^{2\pi}d\theta=\frac{2\pi}{1-r}\to 2\pi, qdo.\ r\to 0^{+}.$$

De modo que, passando os limites $r\to 0^{+}, R\to+\infty$, obtém-se que

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx+\int_{\infty}^{0}\frac{e^{2\pi i(p-1)}x^{p-1}}{1+x}dx=2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

Ou seja

$$(1-e^{i2\pi(p-1)})\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=2\pi i e^{i\pi(p-1)}\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx=\frac{2\pi i e^{i\pi(p-1)}}{(1-e^{i2\pi(p-1)})}=\frac{2\pi i}{e^{i\pi(1-p)}-e^{i\pi(p-1)}}$$

$$\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{2\pi i}{e^{i\pi}e^{-i\pi p}-e^{-i\pi}e^{i\pi p}}=\frac{2\pi i}{-e^{-i\pi p}+e^{i\pi p}}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi p}\qquad\square$$