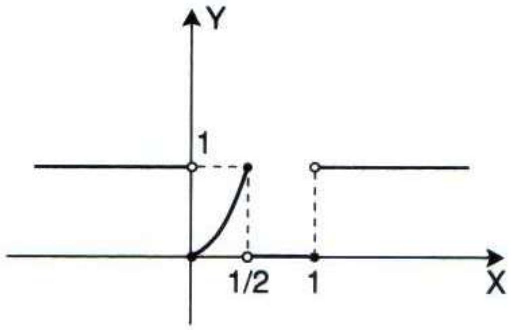

Figura 2.10

2.10 Exercícios

1. Se $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$, achar:

(a) $f(0)$ (*b*) $f(-2)$

(c) $f(1/t)$ (*d*) $f(x-2)$

(e) $f(1/2)$ (*f*) $f(t^2)$

2. Se $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 7}$, determine:

(a) $\dfrac{5f(-1) - 2f(0) + 3f(5)}{7}$ (*b*) $[f(-1/2)]^2$

(c) $f(3x-2)$ (*d*) $f(t) + f(4/t)$

(e) $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ (*f*) $f[f(5)]$.

3. Dada a função $f(x) = |x| - 2x$, calcular $f(-1)$, $f(1/2)$ e $f(-2/3)$. Mostrar que $f(|a|) = -|a|$.

4. Se $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ e $d = -a$, mostre que $f(f(x)) = x$.

5. Se $f(x) = x^2 + 2x$, achar $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, $h \neq 0$ e interpretar o resultado geometricamente.

6. Dada $\Phi(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 7}$, forme as expressões $\Phi(1/x)$ e $1/\Phi(x)$.

7. Dada a função $f(x) = x^2 + 1$, mostrar que, para $a \neq 0$, $f(1/a) = f(a)/a^2$.

8. Dada a função $f(x) = 1/x$, mostrar que $f(1+h) - f(1) = -h/(1+h)$. Calcular $f(a+h) - f(a)$.

9. Seja $f(n)$ a soma dos n termos de uma progressão aritmética. Demonstrar que $f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0$.

10. Exprimir como função de x:

(*a*) A área de uma esfera de raio x.

(*b*) A área de um cubo de aresta x.

(*c*) A área total de uma caixa de volume dado V, sabendo que a base é um quadrado de lado x.

11. Exprimir o comprimento l de uma corda de um círculo de raio 4 cm, como uma função de sua distância x cm ao centro do círculo.

12. Seja $f(x) = (x - 2)(8 - x)$ para $2 \leq x \leq 8$.

(*a*) Determinar $f(5)$, $f(-1/2)$ e $f(1/2)$.

(*b*) Qual o domínio da função $f(x)$?

(*c*) Determinar $f(1 - 2t)$ e indicar o domínio.

(*d*) Determinar $f[f(3)]$ e $f[f(5)]$.

(*e*) Traçar o gráfico de $f(x)$.

13. Determinar o domínio das seguintes funções:

(*a*) $y = x^2$

(*b*) $y = \sqrt{4 - x^2}$

(*c*) $y = \dfrac{1}{x - 4}$

(*d*) $y = \sqrt{x - 2}$

(*e*) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

(*f*) $y = \sqrt{3 + x} + \sqrt[4]{7 - x}$

(*g*) $y = \sqrt[3]{x + 7} - \sqrt[5]{x + 8}$

(*h*) $y = \dfrac{x + a}{x - a}$

(*i*) $y = |x + 2| + 4, \ -5 \leq x \leq 2$

(*j*) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x + 1}}$

(*k*) $y = x - \dfrac{1}{x}$

(*l*) $y = \dfrac{1}{1 + \sqrt{x}}$

14. Usando uma ferramenta gráfica, traçar as curvas definidas pelas equações dadas, identificando as que representam o gráfico de uma função $y = f(x)$. Neste caso, determine a função, o domínio e o conjunto imagem.

(*a*) $y = 3x - 1$

(*b*) $y - x^2 = 0$

(*c*) $y^2 - x = 0$

(*d*) $y + \sqrt{4 - x^2} = 0$

(*e*) $x^2 + y^2 = 16$

(*f*) $y = \dfrac{1}{x}$

(*g*) $y - x^2 = 11$

15. Construir o gráfico, determinar o domínio e o conjunto imagem das seguintes funções:

(*a*) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ x, & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1/2, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(*c*) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x \leq 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x < 2 \\ x^2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

16. Identificar as propriedades e características das seguintes funções a partir das suas representações gráficas (domínio, conjunto imagem, raízes, máximos e mínimos, crescimento e decrescimento).

(*a*) $f(x) = x^2 + 8x + 14$

(*b*) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

(*c*) $y = (x-2)^2$

(*d*) $y = -(x+2)^2$

(e) $y = x^3$

(*f*) $y = 4 - x^3$

(*g*) $f(x) = |x|, -3 \leq x \leq 3$

(*h*) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

(*i*) $f(x) = \dfrac{-2}{x+3}$

(*j*) $f(x) = \sqrt{2x}$

17. Para cada uma das seguintes funções $f(x)$ esboce primeiro o gráfico de $y = f(x)$, depois o gráfico de $y = |f(x)|$ e finalmente o gráfico de $y = \dfrac{f(x)}{2} + \dfrac{|f(x)|}{2}$.

(*a*) $f(x) = (x-2)(x+1)$

(*b*) $f(x) = x^2$

(*c*) $f(x) = -x^2$

(*d*) $f(x) = 4 - x^2$.

18. Sejam $g(x) = x - 3$ e $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3}, & x \neq -3 \\ k, & x = -3 \end{cases}$.

Calcule k tal que $f(x) = g(x)$ para todo x.

19. Para cada item, calcule $f + g, f - g, f \cdot g, f/g, f_0g, g_0f, k \cdot f$, onde k é uma constante.

(*a*) $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 + 1$

(*b*) $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = |x|$

(*c*) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $g(x) = 1/x$

(*d*) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x - 2$

(*e*) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x-3}$

(*f*) $f(x) = x^3$, $g(x) = 1/\sqrt[3]{x}$.

20. Seja h definida por $h(x) = 2x - 7$. Calcule $h_0 h$, h^2 e $h + h$.

21. Sabendo que $f = g \circ h$, nos itens (*a*), (*c*) e (*d*) encontre a função h e no item (*b*) a função g.

(*a*) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 1$.

(*b*) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $h(x) = x + 2$.

(*c*) $f(x) = a + bx$, $g(x) = x + a$.

(*d*) $f(x) = |x^2 - 3x + 5|$, $g(x) = |x|$.

22. Sendo $f(x) = ax + b$, para quais valores de a e b tem-se $(f \circ f)(x) = 4x - 9$?

23. Sejam $f(x) = \sqrt{x-4}$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + 1, x \geq 3$. Calcular $f \circ g$. Dê o domínio e o conjunto imagem de $f(x), g(x)$ e $(f \circ g)(x)$.

24. Sejam $f(x) = \begin{cases} 5x, & x \leq 0 \\ -x, & 0 < x \leq 8 \\ \sqrt{x}, & x > 8 \end{cases}$ e $g(x) = x^3$. Calcular $f \circ g$.

25. Determinar algebricamente o domínio das funções $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$, $h(x) = f(x) + g(x)$, $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ e $q(x) = (f \circ g) \cdot (x)$.

Faça o gráfico das funções e compare os resultados.

26. A função g é definida por $g(x) = x^2$. Defina uma função f tal que $(f \circ g)(x) = x$, para $x \geq 0$ e uma função h, tal que $(h \circ g)(x) = x$, para $x \leq 0$.

27. Se $f(x) = x^2$, encontre duas funções g para as quais $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

28. Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, encontre uma função $g(x)$ tal que $(f/g)(x) = x - 1$.

29. Dadas as funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 2x - 1$:

(*a*) Determine o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$.

(*b*) Determine o domínio e o conjunto imagem de $g(x)$.

(*c*) Construa os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$.

(*d*) Calcule $f + g, f - g, g \cdot f, f/g, f \circ g$ e $g \circ f$.

(*e*) Determine o domínio das funções calculadas no item (*d*).

30. Determinar algebricamente os valores de x, tais que $f(x) < g(x)$, sendo $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 4 - x$. Usando uma ferramenta gráfica, traçar o gráfico das funções dadas e comparar os resultados.

31. Determinar algebricamente os valores de x, tais que o gráfico de $f(x)$ esteja abaixo do gráfico de $g(x)$, sendo $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 1 - x^2$. Usando uma ferramenta gráfica, traçar o gráfico das funções dadas e comparar os resultados.

32. O gráfico da Figura 2.11 ilustra a propagação de uma epidemia numa cidade X. No eixo horizontal temos o tempo e no eixo vertical, o número de pessoas atingidas depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia).

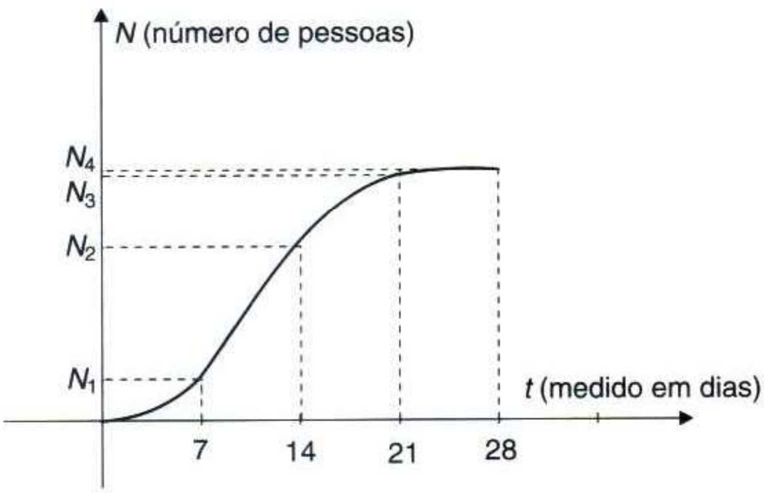

Figura 2.11

(*a*) Em qual semana houve o maior número de pessoas infectadas?

(*b*) Quando a epidemia foi totalmente controlada?

(*c*) Como você descreveria a propagação da doença em linguagem coloquial?

33. Um fabricante produz peças para computadores pelo preço de R$ 2,00 cada uma. Calcula-se que, se cada peça for vendida por x reais, os consumidores comprarão, por mês, $600 - x$ unidades. Expressar o lucro mensal do fabricante como função do preço. Construir um gráfico para estimar o preço ótimo de venda.

34. Um grupo de amigos trabalham no período de férias vendendo salgadinhos nas praias. O aluguel do trailler e todos os equipamentos necessários para a produção são alugados pelo valor de R$ 2.000,00 por mês. O custo do material de cada salgadinho é de R$ 0,10. Expressar o custo total como uma função do número de salgadinhos elaborados.

35. Em um laboratório, um determinado ser vivo apresenta um ciclo produtivo de 1 hora, e a cada hora um par pronto para reprodução gera outro par reprodutor. Como expressar essa experiência populacional em função do número de horas, supondo que a população inicial é de cinco pares?

36. Um grupo de abelhas, cujo número era igual a raiz quadrada da metade de todo o enxame, pousou sobre uma rosa, tendo deixado para trás 8/9 do enxame; apenas uma abelha voava ao redor de um jasmim, atraída pelo zumbido de uma de suas amigas que caíra imprudentemente na armadilha da florzinha de doce fragrância. Quantas abelhas formavam o enxame?

(Adaptação de um problema histórico, originalmente escrito em versos.)

2.11 Funções Especiais

A seguir vamos relacionar algumas funções que chamaremos de funções especiais.

2.11.1 Função Constante

É toda função do tipo $f(x) = k$, que associa a qualquer número real x um mesmo número real k.

A representação gráfica será sempre uma reta paralela ao eixo do x, passando por $y = k$.

O domínio da função $f(x) = k$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

O conjunto imagem é o conjunto unitário $\text{Im}(f) = \{k\}$.

Exemplos:

(i) $f(x) = 2$ [Figura 2.12. (*a*)]

(ii) $f(x) = -3$ [Figura 2.12. (*b*)]

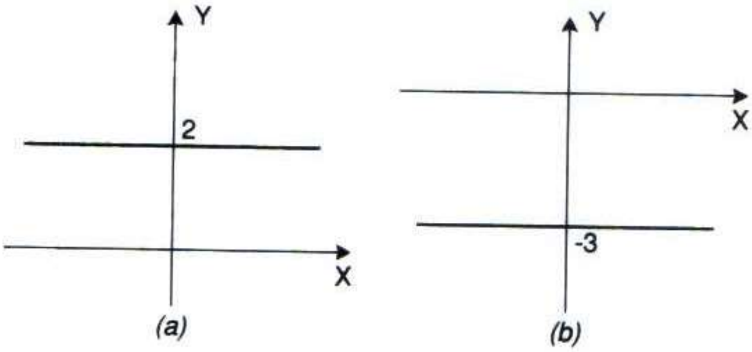

Figura 2.12

2.11.2 Função Identidade

É a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.