$$f(T) = a \times T + b = 0.$$

Assim, temos que $b = I$, $a = \dfrac{-I}{T}$ e $f(t) = \dfrac{-I}{T}t + I$, que é uma função do primeiro grau decrescente.

Quando o valor residual é $r \neq 0$, podemos escrever

$$f(0) = a \times 0 + b = I$$
$$f(T) = a \times T + b = r.$$

Dessa forma $b = I$, $a = \dfrac{r - I}{T}$ e $f(t) = \dfrac{r - I}{T}t + I$, que é uma função do primeiro grau decrescente muito usada para analisar a depreciação de equipamentos.

Observamos que esta função só tem significado para o domínio $t \in [0, T]$.

Para exemplificar, vamos supor que um notebook foi comprado por R$ 4.200,00 e a estimativa de vida útil é de 5 anos. Supondo um valor residual de R$ 800,00, qual é o valor contábil ao término de 3 anos?

Para este exemplo temos:

$$f(0) = 4.200$$
$$f(5) = 800$$

Assim, $f(t) = -680t + 4.200$. Logo, o valor contábil ao término de 3 anos é $f(3) = 2.160$, ou seja, R$ 2.160,00.

2.17 Exercícios

1. Construir os gráficos das funções de 1º grau. Dar o domínio e o conjunto imagem.

   (*a*) $y = kx$; se $k = 0, 1, 2, 1/2, -1, -2$

   (*b*) $y = x + b$; se $b = 0, 1, -1$

   (*c*) $y = 1{,}5x + 2$.

2. Construir os gráficos das funções quadráticas. Dar o domínio e o conjunto imagem.

   (*a*) $y = ax^2$, se $a = 1, 1/2, -2$

   (*b*) $y = x^2 + c$, se $c = 0, 1, 1/2, -3$

   (*c*) $y = y_0 + (x - 1)^2$, se $y_0 = 0, 1, -1$

   (*d*) $y = ax^2 + bx + c$, se $a = 1, b = -2$ $c = 5$.

3. Construir os gráficos das funções polinomiais. Dar o domínio e o conjunto imagem.

   (*a*) $y = 2 + (x - 1)^3$ (*b*) $y = x^4$ (*c*) $y = 2x^2 - 4$.

4. Construir os gráficos das funções racionais. Dar o domínio e o conjunto imagem.

   (*a*) $y = -\dfrac{2}{(x - 1)^2}$ (*b*) $y = \dfrac{1}{x}$ (*c*) $y = \dfrac{x - 1}{x + 4}$.

5. A função $f(x)$ é do 1º grau. Escreva a função se

   $f(-1) = 2$ e $f(2) = 3$.

6. Determinar quais das seguintes funções são pares ou ímpares

(*a*) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ (*b*) $f(x) = 5x^3 - 2x$

(*c*) $f(s) = s^2 + 2s + 2$ (*d*) $f(t) = t^6 - 4$

(*e*) $f(x) = |x|$ (*f*) $f(y) = \dfrac{y^3 - y}{y^2 + 1}$

(*g*) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ (*h*) $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x})$

(*i*) $f(x) = \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$ (*j*) $f(x) = \ln\,(x + \sqrt{1 + x^2})$.

7. Demonstre que, se f e g são funções ímpares, então $(f + g)$ e $(f - g)$ são também funções ímpares.

8. Demonstre que, se f e g são funções ímpares, então $f \cdot g$ e f/g são funções pares.

9. Mostre que a função $\dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ é par e que a função $\dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ é ímpar.

10. Demonstre que qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser expressa como a soma de uma função par com uma função ímpar.

11. Expresse as funções seguintes como a soma de uma função par e uma função ímpar

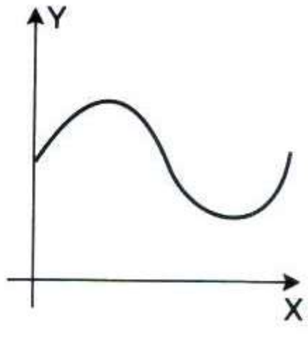
(*a*) $f(x) = x^2 + 2$ (*b*) $f(x) = x^3 - 1$

(*c*) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ (*d*) $f(x) = |x| + |x - 1|$.

12. Seja $f(x)$ uma função, cujo gráfico para $x \geq 0$ tem o aspecto indicado na figura. Completar esse gráfico no domínio de $x < 0$, se:

(*a*) $f(x)$ é par;

(*b*) $f(x)$ é ímpar.



13. Em cada um dos exercícios determine a fórmula da função inversa. Fazer os gráficos da função dada e de sua inversa.

(*a*) $y = 3x + 4$ (*b*) $y = \dfrac{1}{x - a}$

(*c*) $y = \dfrac{x + a}{x - a}$ (*d*) $y = \dfrac{1}{x},\ x > 0$

(*e*) $y = \sqrt{x - 1},\ x \geq 1$ (*f*) $y = -\sqrt{a - x},\ x \leq a$

(*g*) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}, x \geq 0$ (*h*) $y = x^2 - 4, x \leq 0$

(*i*) $y = x^2 - 4, x \geq 0.$

14. Mostrar que a função $y = f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$ coincide com a sua inversa, isto é, $x = f(y)$ ou $f(f(x)) = x$.

15. Dada a função $y = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ definida para todo x real, demonstrar que a sua inversa é a função $x = g(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ definida para $|y| < 1$.

16. Seja $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x < 1 \\ x^2, & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 9 \\ 27\sqrt{x}, & \text{se} \quad x > 9. \end{cases}$

Verifique que f tem uma inversa e encontre $f^{-1}(x)$.

17. Se $f(x)$ e $g(x)$ são periódicas de período T, prove que:

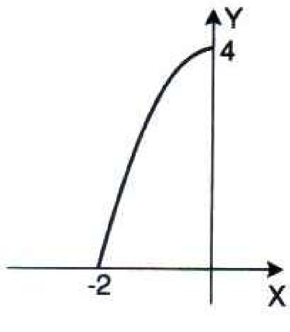
(*a*) $h(x) = f(x) + g(x)$ tem período T.

(*b*) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é periódica de período T.

(*c*) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0 \; \forall \, x$ é periódica de período T.

18. Se $f(x)$ é periódica de período T, prove que 3T também é período de f.

19. Sabendo que $f(x)$ é uma função par e periódica de período T = 4, complete o seu gráfico.



20. Se $f(x) = 2^x$, mostre que

$f(x+3) - f(x-1) = 15/2f(x)$.

21. Seja $\phi(x) = 1/2(a^x + a^{-x})$ e $\psi(x) = 1/2(a^x - a^{-x})$.

Demonstrar que

$\phi(x+y) = \phi(x) \cdot \phi(y) + \psi(x) \cdot \psi(y)$ e

$\psi(x+y) = \phi(x) \cdot \psi(y) + \phi(y) \cdot \psi(x)$.

22. Construir o gráfico das seguintes funções exponenciais.

(*a*) $y = a^x$, se $a = 2$, $1/2$, e ($e = 2{,}718$ ...)

(*b*) $y = 10^{1/x}$

(*c*) $y = e^{-x^2}$

(*d*) $y = -2^x$.

23. Dada $\phi(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$, verifique a igualdade $\phi(a) + \phi(b) = \phi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

24. Sejam $f(x) = \log x$ e $g(x) = x^3$.

Forme as expressões

(*a*) $f[g(2)]$

(*b*) $f[g(a)]$, $a > 0$

(*c*) $g[f(a)]$, $a > 0$.

25. Construir o gráfico das seguintes funções logarítmicas.

(*a*) $y = \ln(-x)$

(*b*) $y = \ln |x|$

(*c*) $y = \ln(x + 1)$

(*d*) $y = \log_a x$ se $a = 10$, 2 e $1/2$

(*e*) $y = x \ln x$.

26. Se $f(x) = \text{arc tg } x$ prove que

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

27. Prove que arc tg a − arc cotg b = arc cotg b − arc cotg a.

28. Seja $f(\theta) = \text{tg }\theta$. Verifique a igualdade $f(2\theta) = \dfrac{2f(\theta)}{1 - [f(\theta)]^2}$.

29. Seja $f(x) = \text{arc cos }(\log_{10} x)$.

Calcular $f(1/10)$, $f(1)$ e $f(10)$.

30. Determinar o domínio das seguintes funções:

(*a*) $y = \text{arc cos } \dfrac{2x}{1+x}$

(*b*) $y = \text{arc sen }(\log_{10} x/10)$

(*c*) $y = \sqrt{\text{sen } 2x}$.

31. Construir o gráfico das seguintes funções trigonométricas. Verificar se são periódicas e em caso afirmativo determinar o período.

(*a*) $y = \text{sen } kx$, $k = 2, 3, 1/2$ e $1/3$

(*b*) $y = k \cos x$, $k = 2, 3, 1/2, 1/3$ e -1

(*c*) $y = k \cos 2x$, $k = 2, -1$ e $1/2$

(*d*) $y = \text{sen }(x - \pi/2)$

(*e*) $y = \cos(x + \pi/2)$

(*f*) $y = \text{tg }(x - 3\pi/2)$

(*g*) $y = \text{cotg }(x + \pi/4)$

(*h*) $y = \text{tg } \dfrac{1}{2}x$

(*i*) $y = 1 + \text{sen } x$

(*j*) $y = 1 + |\text{sen } 2x|$.

32. Dada a função $f(x) = 2 \text{ senh } x - 3 \text{ tgh } x$, calcule $f(2)$, $f(-1)$ e $f(0)$.

33. Prove as identidades:

(*a*) $1 - \text{tgh}^2 u = \text{sech}^2 u$ (*b*) $1 - \text{cotgh}^2 u = -\text{cosech}^2 u$.

34. Defina uma função inversa para $y = \cosh x$, para $x \leq 0$. Esboce o gráfico.

35. Mostre a validade das expressões:

(*a*) $\text{arg} \cosh x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1;$

(*b*) $\text{arg tgh } x = 1/2 \ln \left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right), \ -1 < x < 1;$

(*c*) $\text{arg sech } x = \ln \left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), 0 < x \leq 1.$

36. Sendo $f(x) = \cosh x$, mostre que

$f[\ln (x + \sqrt{x^2 - 1})] = x$

37. Mostre que as funções senh x, tgh x, cotgh x e cosech x são ímpares.

38. Mostre que as funções cosh x e sech x são pares.

39. Analisar a função $f(x) = 24x - 3x^2$ e verificar a possibilidade de representar uma função receita total. Em caso afirmativo identifique a função demanda e responda:

(*a*) Qual a quantidade demandada quando o preço unitário é R$ 5,00?

(*b*) Qual é o preço do produto quando a receita é máxima?

40. As funções de demanda e de oferta de um determinado produto no mercado são dadas por $q_d = 15 - 4p$ e $q_o = 6p - 1$, respectivamente.

(*a*) Determine o preço de equilíbrio.

(*b*) Represente graficamente as funções demanda e oferta, mostrando o ponto de equilíbrio. Esboce os dois gráficos juntos.

41. Uma imobiliária cobra uma comissão de 12% do valor da venda de um imóvel mais R$ 25,00 fixo para as despesas de correio e divulgação. Denote por x o valor do imóvel (em reais) e por $f(x)$ a comissão cobrada pela imobiliária.

(*a*) Descreva a função $f(x)$.

(*b*) Qual o valor recebido pela imobiliária na venda de um imóvel por R$ 185.000,00?

42. O preço de venda de um produto é de R$ 27,00. A venda de 100 unidades dá um lucro de R$ 260,00. Sabendo que o custo fixo de produção é de R$ 540,00 e que o custo variável é proporcional ao número de unidades produzidas, determine:

(*a*) A função receita total.

(*b*) O custo variável para uma produção de 2.000 unidades.

(*c*) A produção necessária para um lucro de R$ 23.460,00.

43. Uma indústria comercializa um certo produto e tem uma função custo total dada por $C(x) = x^2 + 20x + 700$, sendo x o número de unidades produzidas. A função receita total é dada por $R(x) = 200x$. Determine:

(*a*) O lucro para a venda de 100 unidades.

(*b*) Em que valor de x acontecerá o lucro máximo?

44. Determinar graficamente e algebricamente o equilíbrio do mercado considerando as seguintes funções de demanda e oferta:

(*a*) $\begin{cases} Q_d = 10 - 4P \\ Q_s = 6P - 1 \end{cases}$ (*b*) $\begin{cases} Q_d = 4 - P^2 \\ Q_s = 4P - 1 \end{cases}$

45. Uma caixa sem tampa, na forma de um paralelepípedo, tem um volume de 10 cm^3. O comprimento da base é o dobro da largura. O material da base custa R$ 2,00 por m^2 ao passo que o material das laterais custa R$ 0,02 por m^2. Expressar o custo total do material em função da largura da base.

46. Traçar o gráfico das funções trigonométricas. Comparar cada conjunto identificando a transformação ocorrida. Identificar domínio, conjunto imagem, máximos e mínimos, crescimento e decrescimento.

(*a*) $f(x) = \text{sen}\, x$, $g(x) = 2\, \text{sen}\, x$, $h(x) = 1/2\, \text{sen}\, x$

(*b*) $f(x) = \text{sen}\, x$, $g(x) = \text{sen}\, 2x$, $h(x) = \text{sen}\, (1/2x)$

(*c*) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos x + 3$, $h(x) = \cos x - 3$

(*d*) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos (x + 2)$, $h(x) = \cos (x - 2)$

(*e*) $f(x) = \text{sen}\, x$, $g(x) = -\text{sen}\, x$

47. Usando uma ferramenta gráfica, trace numa mesma janela, o gráfico das funções dadas em cada item e, a seguir, responda a questão:

Dado o gráfico de $f(x)$, o que se pode afirmar sobre o gráfico de $g(x) = f(x - a)$ quando $a > 0$? E quando $a < 0$?

(a) $y = x^2$ $y = (x - 2)^2$ $y = (x - 4)^2$

(*b*) $y = x^2$ $y = (x + 2)^2$ $y = (x + 4)^2$

48. Usando uma ferramenta gráfica, trace numa mesma janela o gráfico das funções dadas em cada item e, a seguir, responda a questão:

Dado o gráfico de $f(x)$, o que se pode afirmar sobre o gráfico de $g(x) = f(x) + a$, quando $a > 0$? E quando $a < 0$?

(*a*) $y = x^2$ $y = x^2 + 2$ $y = x^2 + 4$

(*b*) $y = x^2$ $y = x^2 - 2$ $y = x^2 - 4$

49. Identifique algebricamente as transformações realizadas na parábola "mãe" $f(x) = x^2$, para obter as seguintes funções quadráticas. A seguir trace o gráfico e compare os resultados.

(*a*) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

(*b*) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

(*c*) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

50. Determine algebricamente a função inversa. A seguir, numa mesma janela, trace o gráfico de cada função, de sua inversa e da função identidade.

(*a*) $y = 2x - 1$

(*b*) $y = \dfrac{x}{2} - 1$

(*c*) $y = x^3$

(*d*) $y = (x - 1)^3 + 4$

51. Para cada uma das funções, se necessário, restrinja o domínio e o contradomínio e determine a inversa.

(*a*) $y = x^2$

(*b*) $y = x^2 - 2x + 1$

(*c*) $y = 2x^2 - 6x - 10$

(*d*) $y = e^x$

52. A locadora A aluga um carro popular ao preço de R$ 30,00 a diária mais R$ 0,20 por quilômetro rodado. A locadora B o faz por R$ 40,00 a diária mais R$ 0,10 por quilômetro rodado. Qual a locadora você escolheria, se você pretendesse alugar um carro por um dia e pagar o menos possível? Justifique algebricamente e graficamente.

53. Dentre todos os retângulos de perímetro igual a 80 cm, quais as dimensões do retângulo de área máxima?

54. Para medir a temperatura são usados graus Celsius (°C) ou graus Fahrenheit (°F). Ambos os valores 0°C e 32°F representam a temperatura em que a água congela e ambos os valores 100°C e 212°F representam a temperatura de fervura da água. Suponha que a relação entre as temperaturas expressas nas duas escalas pode ser representada por uma reta.

(*a*) Determine a função do primeiro grau F(C) que dá a temperatura em °F, quando ela é conhecida em °C.

(*b*) Esboce o gráfico de F.

(*c*) Qual a temperatura em °F corresponde a 25°C?

(*d*) Existe alguma temperatura que tem o mesmo valor numérico em °C e em °F?

55. Numa dada cidade a população atual é de 380.000 habitantes. Se a população apresenta uma taxa de crescimento anual de 1,5%, estime o tempo necessário para a população duplicar. Use um modelo de crescimento exponencial.

56. Uma criança tem um montante fixo $M =$ R$ 180,00 para comprar latinhas de refrigerantes e cachorros quentes para sua festa de aniversário. Suponha que cada latinha de refrigerante custe R$1,20 e cada cachorro quente R$ 1,50.

(*a*) Obtenha a equação de restrição orçamentária.

(*b*) Esboce o gráfico, supondo as variáveis contínuas.

(*c*) Se a criança optar em usar todo seu orçamento comprando somente cachorros quentes, estime o número de cachorros quentes que podem ser comprados.

57. O custo total de uma plantação de soja é função em geral, da área cultivada. Uma parcela do custo é aproximadamente constante (custos fixos) e diz respeito às benfeitorias e equipamentos necessários. A outra parcela diz respeito aos custos dos insumos e mão-de-obra e depende da área plantada (custos variáveis). Supor que os custos fixos sejam de R$ 12.400,00 e os custos variáveis sejam de R$ 262,00 por hectare.

(*a*) Determinar o custo total da plantação em função do número de hectares plantado.

(*b*) Fazer um esboço do gráfico da função custo total.

(*c*) Como podemos visualizar os custos fixos e variáveis no gráfico?

58. A meia-vida do rádio-226 é de 1.620 anos.

(*a*) obter o modelo de decaimento exponencial para esta substância.

(*b*) Após 700 anos, qual o percentual de uma dada quantidade inicial de rádio ainda resta?

59. Uma certa substância radioativa decai exponencialmente sendo que, após 100 anos, ainda restam 60% da quantidade inicial.

(*a*) Obter o modelo de decaimento exponencial para esta substância.

(*b*) Determinar a sua meia-vida.

(*c*) Determinar o tempo necessário para que reste somente 15% de uma dada massa inicial.