3.10 Exercícios

1. Para cada uma das seguintes funções ache

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

(*a*) $f(x) = 3x^2$. (*b*) $f(x) = 1/x, x \neq 0$. (*c*) $f(x) = 2/3x^2$.

(*d*) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$. (*e*) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, x \neq -1$. (*f*) $f(x) = x^3$.

2. Esboçar o gráfico das seguintes funções e dar uma estimativa dos limites indicados.

(*a*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

(*b*) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

(*c*) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

(*d*) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 - 1}$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

3. Calcular os limites indicados no Exercício 2 e comparar seus resultados com as estimativas obtidas.

Nos exercícios 4 a 27 calcule os limites.

4. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$.

5. $\lim\limits_{t \to -2} \dfrac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t + 2)(t - 3)}$.

6. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$.

7. $\lim\limits_{t \to 5/2} \dfrac{2t^2 - 3t - 5}{2t - 5}$.

8. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 + (1 - a)x - a}{x - a}$.

9. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$.

10. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}$.

11. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$.

12. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

13. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$.

14. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^4 - 16}{h}$.

15. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(4+t)^2 - 16}{t}$.

16. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{25+3t} - 5}{t}$.

17. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{a^2+bt} - a}{t}$, $a > 0$.

18. $\lim\limits_{h\to 1} \dfrac{\sqrt{h} - 1}{h - 1}$.

19. $\lim\limits_{h\to -4} \dfrac{\sqrt{2(h^2-8)} + h}{h+4}$.

20. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+h} - 2}{h}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{-x}$.

22. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+a^2} - a}{\sqrt{x^2+b^2} - b}$, $a, b > 0$.

23. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a}$, $a \neq 0$.

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

3.11 Limites no Infinito

No Exemplo 1 da Seção 3.1, analisamos o comportamento da função $f(x) = 1 - 1/x$ para valores de x muito grandes. Intuitivamente, vimos que podemos tornar o valor de $f(x)$ tão próximo de 1 quanto desejarmos, tomando para x valores suficientemente elevados. (Observar a Tabela 3.1.) Da mesma forma, fazendo x decrescer ilimitadamente vemos que $f(x)$ se aproxima desse mesmo valor 1.

Temos as seguintes definições:

3.11.1 Definição Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$. Escrevemos,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L,$$

quando o número L satisfaz à seguinte condição:

Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > A$.

3.11.2 Definição Seja f definida em $(-\infty, b)$. Escrevemos,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L,$$

se L satisfaz a seguinte condição:

Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $B < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x < B$.