

$$= 1 \cdot \ln \frac{a}{b}$$

$$= \ln a/b.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - a^{x-1}}{x^2 - 1}.$$

Neste exemplo, utilizamos artifícios de cálculo para aplicarmos a proposição 3.15.5.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - a^{x-1}}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{x-1} - 1) - (a^{x-1} - 1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{x-1} - 1}{x-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{x-1} - 1}{x-1} \right]. \end{aligned}$$

Fazemos $t = x - 1$ e consideramos que, quando $x \rightarrow 1$, $x \neq 1$, temos $t \rightarrow 0$, $t \neq 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - a^{x-1}}{x^2 - 1} &= \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} \right] \\ &= \frac{1}{2} (\ln e - \ln a) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \ln a). \end{aligned}$$

3.16 Exercícios

1. Determinar as assíntotas horizontais e verticais do gráfico das seguintes funções:

$$(a) f(x) = \frac{4}{x-4}$$

$$(b) f(x) = \frac{-3}{x+2}$$

$$(c) f(x) = \frac{4}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(d) f(x) = \frac{-1}{(x-3)(x+4)}$$

$$(e) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$$

$$(f) f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x-3}}$$

$$(g) f(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 16}}$$


$$(h) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x - 12}}$$


(i) $f(x) = e^{1/x}$

(j) $f(x) = e^x - 1$

(k) $f(x) = \ln x$

(l) $f(x) = \operatorname{tg} x$

2.  Constatar, desenvolvendo exemplos graficamente, que as funções racionais do tipo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ com $p(x)$ e $q(x)$ polinômios, tais que a diferença entre o grau do numerador e o grau do denominador é igual 1, possuem assíntotas inclinadas.


3.  Analisar graficamente a existência de assíntotas para as seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

(b) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{x^2}$

(c) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$

(d) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$

4.  Fazer o gráfico das funções seguintes e determinar os respectivos limites. Para melhor visualização, traçar, também, o gráfico das retas indicadas. A seguir, determinar analiticamente os limites dados e comparar os resultados.

(a) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $y = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(b) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}$ e $y = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(c) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ e $y = 3$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(d) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$ e $y = 4$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$


(e) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 1/3x}{x}$ e $y = 1/3$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(f) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^3(x/2)}{x^3}$ e $y = 1/8$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Nos exercícios 5 a 27, calcule os limites aplicando os limites fundamentais.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 9x}{x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{3x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 10x}{\text{sen } 7x}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}, b \neq 0$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } ax}{x}$.
10. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\text{tg}^3 x + 1}{(x + 1)^3}$.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) \cdot \cos ec \pi x$.
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \text{sen } 2x}{2x + 3 \text{sen } 4x}$.
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$.
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cos x + \cos 2x}{x^2}$.
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 3}{2n + 1} \right)^{n+1}$.
18. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + 1/\text{tg } x)^{\text{tg } x}$.
19. $\lim_{x \rightarrow 3\pi/2} (1 + \cos x)^{1/\cos x}$.
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x} \right)^x$.
21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{10^{x-2} - 1}{x - 2}$.
22. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4^{\frac{x+3}{5}} - 1}{x + 3}$.
23. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5^x - 25}{x - 2}$.
24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{\frac{x-1}{4}} - 1}{\text{sen } [5(x - 1)]}$.
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$.
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } h ax}{x}$.
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\text{sen } ax - \text{sen } bx}$.
28.  Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ das funções dadas. Em seguida conferir graficamente os resultados encontrados.
- (a) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x+5}$
- (b) $f(x) = \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$
- (c) $f(x) = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$