

### 3.18 Exercícios

1. Investigue a continuidade nos pontos indicados:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{em } x = 0.$$

$$(b) \quad f(x) = x - |x| \quad \text{em } x = 0.$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases} \quad \text{em } x = 2.$$

$$(d) \quad f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} 1/x} \quad \text{em } x = 2.$$

$$(e) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{em } x = 0.$$

$$(f) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 1 \\ 1 - |x|, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \text{em } x = 1.$$

$$(g) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases} \quad \text{em } x = 2.$$

$$(h) \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq -1 \\ 1 - |x|, & x < -1 \end{cases} \quad \text{em } x = -1.$$

$$(i) \quad f(x) = \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 + 1}, \quad \text{em } x = 2.$$

$$(j) \quad f(x) = \frac{2}{3x^2 + x^3 - x - 3}, \quad \text{em } x = -3.$$

2. Determine, se existirem, os valores de  $x \in D(f)$ , nos quais a função  $f(x)$  não é contínua.

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 1}, & x^2 \neq 1 \\ 0, & x = -1. \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \frac{1 + \cos x}{3 + \operatorname{sen} x}$$

$$(c) f(x) = \frac{x - |x|}{x}$$


$$(d) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 6}, & x < -3 \text{ e } x > -2 \\ -1, & -3 \leq x \leq -2 \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(f) f(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$(h) f(x) = \cos \frac{x}{x + \pi}$$

3.  Construa o gráfico e analise a continuidade das seguintes funções:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} \ln(x + 1), & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + 4x + 3}$$

4. Calcule  $p$  de modo que as funções abaixo sejam contínuas.

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 + px + 2, & x \neq 3 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x + 2p, & x \leq -1 \\ p^2, & x > -1 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \neq 0 \\ p^3 - 7, & x = 0. \end{cases}$$

5. Determine, se existirem, os pontos onde as seguintes funções não são contínuas.

$$(a) f(x) = \frac{x}{(x - 3)(x + 7)}$$

$$(b) f(x) = \sqrt{(3 - x)(6 - x)}$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{1 + 2 \operatorname{sen} x}$$

$$(d) f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 6x + 10}$$

6. Prove que se  $f(x)$  e  $g(x)$  são contínuas em  $x_0 = 3$ , também o são  $f + g$  e  $f \cdot g$ .

7. Defina funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  que satisfaçam:

(a)  $f$  não é contínua em 2 pontos de seu domínio;

(b)  $g$  é contínua em todos os pontos de seu domínio mas não é contínua em  $\mathbb{R}$ ;

(c)  $h_0f$  é contínua em todos os pontos do domínio de  $f$ ;

Faça o gráfico das funções  $f$ ,  $g$ ,  $h$  e  $h_0f$ .

8. Dê exemplo de duas funções  $f$  e  $g$  que não são contínuas no ponto  $a = 0$  e tais que  $h = f \cdot g$  é contínua neste ponto. Faça o gráfico das funções  $f$ ,  $g$  e  $h$ .

9. Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  funções tais que, para todos  $x$ ,  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ . Se  $f$  e  $h$  são contínuas no ponto  $x = a$  e  $f(a) = g(a) = h(a)$ , prove que  $g$  é contínua no ponto  $a$ .

10. Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida no ponto  $a$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m$ , prove que  $f$  é contínua no ponto  $a$ .