Prova: Podemos escrever $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$.

Aplicando a proposição 4.11.10, vem:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} \\ &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -n \cdot x^{n-1} \cdot x^{-2n} \\ &= -nx^{-n-1}. \end{aligned}$$

4.12 Exercícios

Nos exercícios 1 a 22 encontrar a derivada das funções dadas. A seguir, comparar os resultados encontrados com os resultados obtidos a partir do uso de um software algébrico.

1. $f(r) = \pi r^2$

2. $f(x) = 3x^2 + 6x - 10$

3. $f(w) = aw^2 + b$

4. $f(x) = 14 - \frac{1}{2}x^{-3}$

5. $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 6)$

6. $f(x) = (7x - 1)(x + 4)$

7. $f(x) = (3x^5 - 1)(2 - x^4)$

8. $f(x) = \frac{2}{3}(5x - 3)^{-1}(5x + 3)$

9. $f(x) = (x - 1)(x + 1)$

10. $f(s) = (s^2 - 1)(3s - 1)(5s^3 + 2s)$

11. $f(x) = 7(ax^2 + bx + c)$

12. $f(u) = (4u^2 - a)(a - 2u)$

13. $f(x) = \dfrac{2x + 4}{3x - 1}$

14. $f(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1}$

15. $f(t) = \dfrac{3t^2 + 5t - 1}{t - 1}$

16. $f(t) = \dfrac{2 - t^2}{t - 2}$

17. $f(x) = \dfrac{4 - x}{5 - x^2}$

18. $f(x) = \dfrac{5x + 7}{2x - 2}$

19. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}(3x^2 + 6x)$

20. $f(t) = \dfrac{(t - a)^2}{t - b}$

21. $f(x) = \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{5}{x^5}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{2}{x^6}$

23. Seja $p(x) = (x - a)(x - b)$, sendo a e b constantes. Mostrar que se $a \neq b$, então $p(a) = p(b) = 0$, mas $p'(a) \neq 0$ e $p'(b) \neq 0$.

24. Dadas as funções $f(x) = x^2 + Ax$ e $g(x) = Bx$, determinar A e B de tal forma que

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = 1 + 2x \\ f(x) - g(x) = x^2 \end{cases}$$

25. Dada a função $f(t) = 3t^3 - 4t + 1$, encontrar $f(0) - tf'(0)$.

26. Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{2x+1}{3x-4}$ no ponto de abscissa $x = -1$. Usando uma ferramenta gráfica, esboçar o gráfico da função e da reta tangente.

27. Encontrar a equação da reta normal à curva $y = (3x^2 - 4x)^2$ no ponto de abscissa $x = 2$.

28. Encontrar as equações das retas tangentes à curva $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ que sejam paralelas à reta $y = x$. Usando uma ferramenta gráfica, esboçar o gráfico da curva, da reta dada e das tangentes encontradas.

29. Em que pontos o gráfico da função $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x$ tem tangente horizontal? Esboçar o gráfico e analisar o resultado obtido.

30. Seja $y = ax^2 + bx$. Encontrar os valores de a e b, sabendo que a tangente à curva no ponto $(1, 5)$ tem inclinação $m = 8$.

4.13 Derivada de Função Composta

Consideremos duas funções deriváveis f e g onde $y = g(u)$ e $u = f(x)$.

Para todo x tal que $f(x)$ está no domínio de g, podemos escrever $y = g(u) = g[f(x)]$, isto é, podemos considerar a função composta $(g_0 f)(x)$.

Por exemplo, uma função tal como $y = (x^2 + 5x + 2)^7$ pode ser vista como a composta das funções $y = u^7 = g(u)$ e $u = x^2 + 5x + 2 = f(x)$.

A seguir apresentamos a regra da cadeia, que nos dá a derivada da função composta $g_0 f$ em termos das derivadas de f e g.

4.13.1 Proposição (Regra da cadeia) Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$ e as derivadas dy/du e du/dx existem, então a função composta $y = g[f(x)]$ tem derivada que é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ou } y'(x) = g'(u) \cdot f'(x).$$

Prova Parcial: Vamos fazer a demonstração supondo que existe um intervalo aberto I contendo x, tal que

$$\Delta u = [f(x + \Delta x) - f(x)] \neq 0 \text{ sempre que } (x + \Delta x) \in I \text{ e } \Delta x \neq 0. \tag{1}$$

Isso se verifica para um grande número de funções, porém não para todas. Por exemplo, se f for uma função constante a condição apresentada não é satisfeita. Porém, neste caso, podemos provar a fórmula facilmente. De fato, se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$ e $y = g[f(x)] = g(c)$ é constante. Assim, $y'(x) = 0 = g'(u) \cdot f'(x)$.

Então provemos que $y'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$ quando $f(x)$ satisfaz a condição (1).

Como $y = g[f(x)]$, temos:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g[f(x + \Delta x)] - g[f(x)]}{\Delta x} \text{ se este limite existir.}$$