(33) $y = \text{arg tgh } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 - u^2}$, $|u| < 1$

(34) $y = \text{arg cotgh } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 - u^2}$, $|u| > 1$

(35) $y = \text{arg sech } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{u\sqrt{1 - u^2}}$, $0 < u < 1$

(36) $y = \text{arg cosech } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{1 + u^2}}$, $u \neq 0$.

4.16 Exercícios

1. Determinar a equação da reta tangente às seguintes curvas, nos pontos indicados. Esboçar o gráfico em cada caso.

(*a*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x = \dfrac{1}{3}$, $x = 3$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x - a}$, $a \in \mathbb{R} - \{-2, 4\}$; $x = -2$, $x = 4$.

(*c*) $f(x) = 2\sqrt{x}$; $x = 0$, $x = 3$, $x = a$, $a > 0$.

2. Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 1$, que seja perpendicular à reta $y = -x$.

3. A posição de uma partícula que se move no eixo dos x depende do tempo de acordo com a equação $x = 3t^2 - t^3$, em que x vem expresso em metros e t, em segundos.

(*a*) Qual é o seu deslocamento depois dos primeiros 4 segundos?

(*b*) Qual é a velocidade da partícula ao terminar cada um dos 4 primeiros segundos?

(*c*) Qual é a aceleração da partícula em cada um dos 4 primeiros segundos?

4. Um corpo cai livremente partindo do repouso. Calcule sua posição e sua velocidade depois de decorridos 1 e 2 segundos. (Da Física, use a equação $y = v_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2$ para determinar a posição y do corpo, onde v_0 é a velocidade inicial e $g \cong 9{,}8 \text{ m/s}^2$).

Nos exercícios de 5 a 42 calcular a derivada.

5. $f(x) = 10(3x^2 + 7x - 3)^{10}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{a}(bx^2 + ax)^3$

7. $f(t) = (7t^2 + 6t)^7(3t - 1)^4$

8. $f(t) = \left(\dfrac{7t + 1}{2t^2 + 3}\right)^3$

9. $f(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 6x - 2)^2}$

10. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x - 1}}$

11. $f(t) = \sqrt{\dfrac{2t + 1}{t - 1}}$

12. $f(x) = \dfrac{1}{3}e^{3 - x}$

13. $f(x) = 2^{3x^2 + 6x}$

14. $f(s) = (7s^2 + 6s - 1)^3 + 2e^{-3s}$

15. $f(t) = e^{t/2}(t^2 + 5t)$

16. $f(x) = \log_2(2x + 4)$

17. $f(s) = \log_3\sqrt{s + 1}$

18. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$

19. $f(x) = \dfrac{a^{3x}}{b^{3x^2 - 6x}}$

20. $f(t) = (2t + 1)^{t^2 - 1}$

21. $f(s) = \frac{1}{2}(a + bs)^{\ln(a+bs)}$

22. $f(u) = \cos(\pi/2 - u)$

23. $f(\theta) = 2\cos\theta^2 \cdot \operatorname{sen} 2\theta$

24. $f(x) = \operatorname{sen}^3(3x^2 + 6x)$

25. $f(x) = 3\operatorname{tg}(2x + 1) + \sqrt{x}$

26. $f(x) = \frac{3\sec^2 x}{x}$

27. $f(x) = e^{2x}\cos 3x$

28. $f(\theta) = -\operatorname{cosec}^2\theta^3$

29. $f(x) = a\sqrt{\cos bx}$

30. $f(u) = (u \operatorname{tg} u)^2$

31. $f(\theta) = a^{\operatorname{cotg}\theta},\ a > 0$

32. $f(x) = (\operatorname{arc\,sen} x)^2$

33. $f(t) = t \operatorname{arc\,cos} 3t$

34. $f(t) = \operatorname{arc\,cos}(\operatorname{sen} t)$

35. $f(x) = \operatorname{arc\,sec}\sqrt{x}$

36. $f(t) = t^2 \operatorname{arc\,cosec}(2t + 3)$

37. $f(x) = \frac{\ln(\operatorname{sen} hx)}{x}$

38. $f(t) = [\operatorname{cotgh}(t + 1)^2]^{1/2}$

39. $f(x) = \left[\operatorname{cosech}\frac{(3x + 1)}{x}\right]^3$

40. $f(x) = x \operatorname{arg\,cosh} x - \sqrt{x^2 - 1}$

41. $f(x) = x \operatorname{arg\,cotgh} x^2$

42. $f(x) = \frac{1}{2}[\operatorname{arg\,cotgh} x^2]^2$

Nos exercícios 43 a 79, calcular a derivada. A seguir, usando um software algébrico, comparar os resultados.

43. $f(x) = \frac{1}{3}(2x^5 + 6x^{-3})^5$

44. $f(x) = (3x^2 + 6x)^{10} - \frac{1}{x^2}$

45. $f(x) = (5x - 2)^6(3x - 1)^3$

46. $f(x) = (2x - 5)^4 + \frac{1}{x + 1} - \sqrt{x}$

47. $f(t) = (4t^2 - 5t + 2)^{-1/3}$

48. $f(x) = \frac{7x^2}{2\sqrt[5]{3x + 1}} + \sqrt{3x + 1}$

49. $f(x) = 2e^{3x^2 + 6x + 7}$

50. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

51. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\ln 2x}$

52. $f(t) = \frac{e^{-t^2} + 1}{t}$

53. $f(t) = \frac{\sqrt{e^t - 1}}{\sqrt{e^t + 1}}$

54. $f(x) = \frac{1}{a}(bx^2 + c) - \ln x$

55. $f(x) = \frac{1}{2}\ln(7x^2 - 4)$

56. $f(x) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$

57. $f(t) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\sqrt{t}}$

58. $f(x) = (e^{x^2} + 4)^{\sqrt{x}}$

59. $f(x) = \text{sen}\,(2x + 4)$

60. $f(\theta) = 2\cos(2\theta^2 - 3\theta + 1)$

61. $f(\alpha) = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

62. $f(\theta) = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta$

63. $f(s) = \text{cotg}^4\,(2s - 3)^2$

64. $f(x) = \left(\dfrac{1}{\text{sen}\,x}\right)^2$

65. $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x + 1)}{e^x}$

66. $f(x) = \text{sen}^2(x/2)\cos^2(x/2)$

67. $f(t) = \ln\,\cos^2 t$

68. $f(x) = \log_2(3x - \cos 2x)$

69. $f(t) = e^{2\cos 2t}$

70. $f(x) = \text{arc}\cos\dfrac{2x}{3}$

71. $f(s) = \dfrac{\text{arc sen}\, s/2}{s + 1}$

72. $f(x) = \text{arc tg}\,\dfrac{1}{1 - x^2}$

73. $f(x) = \text{senh}\,(2x - 1)$

74. $f(t) = \ln\,[\cosh\,(t^2 - 1)]$

75. $f(t) = \text{tgh}\,(4t^2 - 3)^2$

76. $f(x) = \text{sech}\,[\ln x]$

77. $f(x) = (\text{arg senh}\, x)^2$

78. $f(x) = \text{arg tgh}\,\dfrac{1}{2}x^2$

79. $f(x) = (x + 1)\,\text{arg sech}\, 2x$

80. Encontrar $f'(x)$.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \ln|3 - 4x|$

(c) $f(x) = e^{|2x-1|}$

81. Calcular $f'(0)$, se $f(x) = e^{-x}\cos 3x$.

82. Calcular $f'(1)$, se $f(x) = \ln\,(1 + x) + \text{arc sen}\, x/2$.

83. Dada $f(x) = e^{-x}$, calcular $f(0) + x\,f'(0)$.

84. Dada $f(x) = 1 + \cos x$, mostra que $f(x)$ é par e $f'(x)$ é impar. Usando uma ferramenta gráfica, esboçar o gráfico de $f(x)$ e $f'(x)$ observando as simetrias.

85. Dada $f(x) = \text{sen}\,2x\,\cos\,3x$, mostrar que $f(x)$ é impar e $f'(x)$é par.

86. Dada $f(x) = \dfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2x$, calcular $f'(x)$ e verificar que f e f' são periódicas de mesmo período. Usando uma ferramenta gráfica, esboçar os gráficos de $f(x)$ e $f'(x)$ comprovando os resultados.

87. Seja $f(x)$ derivável e periódica de período T. Mostrar que f' também é periódica de período T.

88. Mostrar que a função $y = x\,e^{-x}$ satisfaz a equação $xy' = (1 - x)y$.

89. Mostrar que a função $y = x\,e^{-x^2/2}$ satisfaz a equação $xy' = (1 - x^2)y$.

90. Mostrar que a função $y = \dfrac{1}{1 + x + \ln x}$ satisfaz a equação $xy' = y(y\ln x - 1)$.

91. Sejam f e g funções tais que $(f_0\, g)(x) = x$ para todo x, e $f'(x)$ e $g'(x)$ existem para todo x. Mostrar que $f'(g(x)) = \dfrac{1}{g'(x)}$ sempre que $g'(x) \neq 0$.

92. Obtenha a regra do produto para $(uv)'$ derivando a fórmula $\ln(uv) = \ln u + \ln v$.

93. Provar que:

(*a*) Se $y = \text{cotg}\, x$, então $y' = -\text{cosec}^2 x$.

(*b*) Se $y = \sec x$, então $y' = \sec x \cdot \text{tg}\, x$.

(*c*) Se $y = \text{arc cotg}\, x$, então $y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$.

(*d*) Se $y = \text{arc cosec}\, x$, $|x| \geq 1$, então $y' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| > 1$.

(*e*) Se $y = \cosh x$, então $y' = \text{senh}\, x$.

(*f*) Se $y = \text{tgh}\, x$, então $y' = \text{sech}^2 x$.

(*g*) Se $y = \text{sech}\, x$, então $y' = -\text{sech}\, x \cdot \text{tgh}\, x$.

(*h*) Se $y = \text{arc sech}\, x$, então $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}$, $0 < x < 1$.

(*i*) Se $y = \text{arc cosech}\, x$, então $y' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}$, $x \neq 0$.

94. Encontrar todos os pontos onde o gráfico de $f(x)$ tem tangente horizontal. Usando uma ferramenta gráfica, esboçar o gráfico de $f(x)$ e $f'(x)$ e comparar os resultados.

(*a*) $f(x) = \text{sen}\, 2x$;

(*b*) $f(x) = 2\cos x$.

95. Traçar num mesmo sistema de coordenadas as funções $y = -1 - x^2$ e $y = 1 + x^2$. Usando a visualização gráfica, responder:

(*a*) Quantas retas são tangentes a ambas as parábolas?

(*b*) Quais são os pontos de tangência?

(*c*) É possível encontrar essas retas algebricamente?

96. Dada a função $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$ definida para $x \in [3, +\infty)$, desenvolver os seguintes itens:

(*a*) Determinar a função inversa $y = g(x) = f^{-1}(x)$ e identificar o domínio.

(*b*) Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de abscissa 5.

(*c*) Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = g(x)$ no ponto de abscissa 0.

(*d*) Fazer uma representação gráfica dos resultados obtidos e identificar a relação estabelecida no Teorema 4.14.

4.17 Derivadas Sucessivas

Seja f uma função derivável definida num certo intervalo. A sua derivada f' é também uma função, definida no mesmo intervalo. Podemos, portanto, pensar na derivada da função f'.

4.17.1 Definição Seja f uma função derivável. Se f' também for derivável, então a sua derivada é chamada *derivada segunda de* f e é representada por $f''(x)$ (lê-se f-duas linhas de x) ou $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ (lê-se *derivada segunda de* f em relação a x).

4.17.2 Exemplos

(i) Se $f(x) = 3x^2 + 8x + 1$, então:

$$f'(x) = 6x + 8 \text{ e}$$
$$f''(x) = 6.$$

(ii) Se $f(x) = \operatorname{tg} x$, então:

$$f'(x) = \sec^2 x \text{ e}$$
$$f''(x) = 2\sec x \cdot \sec x \cdot \operatorname{tg} x$$
$$= 2\sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x.$$

(iii) Se $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, então:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x$$
$$= x(x^2 + 1)^{-1/2} \text{ e}$$
$$f''(x) = x \cdot \frac{-1}{2}(x^2 + 1)^{-3/2} \cdot 2x + (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}.$$

Se f'' é uma função derivável, sua derivada, representada por $f'''(x)$, é chamada *derivada terceira* de $f(x)$.

A derivada de ordem n ou n-ésima derivada de f, representada por $f^{(n)}(x)$, é obtida derivando-se a derivada de ordem $n - 1$ de f.