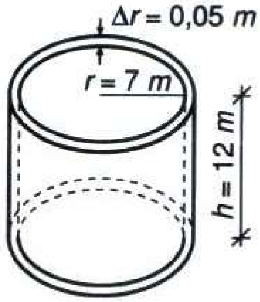

Figura 4.24

Dando um acréscimo Δr o volume da coroa será igual à variação ΔV em V.

Usando diferenciais, temos:

$$\begin{aligned} \Delta V \cong dV &= 2\pi r h\, \Delta r \\ &= 2\pi \cdot 7 \cdot 12 \cdot 0{,}05 \\ &= 8{,}4\pi \text{ m}^3. \end{aligned}$$

O volume exato será

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pi(r + \Delta r)^2 \cdot h - \pi r^2 h \\ &= \pi(7{,}05)^2 \cdot 12 - \pi \cdot 7^2 \cdot 12 \\ &= 596{,}43\pi - 588\pi \\ &= 8{,}43\pi \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Portanto, o erro cometido na aproximação usada foi

$$\Delta V - dV = 0{,}03\pi \text{ m}^3.$$

4.21 Exercícios

Nos exercícios 1 a 12 calcular as derivadas sucessivas até a ordem n indicada.

1. $y = 3x^4 - 2x;\ n = 5$

2. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ n = 3$

3. $y = 3 - 2x^2 + 4x^5;\ n = 10$

4. $y = \sqrt{3 - x^2};\ n = 2$

5. $y = \dfrac{1}{x - 1};\ n = 4$

6. $y = e^{2x+1};\ n = 3$

7. $y = \dfrac{1}{e^x};\ n = 4$

8. $y = \ln 2x;\ n = 2$

9. $y = \operatorname{sen} ax;\ n = 7$

10. $y = -2 \cos \dfrac{x}{2};\ n = 5$

11. $y = \operatorname{tg} x;\ n = 3$

12. $y = \operatorname{arc\,tg} x;\ n = 2$

13. Achar a derivada de ordem 100 das funções:

a) $y = \operatorname{sen} x$;

b) $y = \cos x$.

14. Mostrar que a derivada de ordem n da função $y = 1/x$ é dada por $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

15. Mostrar que a derivada de ordem n da função $y = e^{ax}$ é dada por $y^{(n)} = a^n e^{ax}$.

16. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis ate 3ª ordem. Mostrar que:

a) $(fg)'' = gf'' + 2f'g' + fg''$;   *b)* $(fg)''' = gf''' + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$.

17. Mostrar que $x = A \cos(\omega t + \alpha)$, onde A, ω e α são constantes, satisfaz a equação

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \left(\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

18. Calcular $y' = \dfrac{dy}{dx}$ das seguintes funções definidas implicitamente.

a) $x^3 + y^3 = a^3$ *b)* $x^3 + x^2y + y^2 = 0$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ *d)* $y^3 = \dfrac{x - y}{x + y}$

e) $a\cos^2(x + y) = b$ *f)* $\operatorname{tg} y = xy$

g) $e^y = x + y$.

19. Determinar as retas tangente e normal à circunferência de centro (2, 0) e raio 2, nos pontos de abscissa 1.

20. Demonstrar que a reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no ponto (x_0, y_0) tem a equação

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

21. Em que pontos a reta tangente à curva $y^2 = 2x^3$ é perpendicular à reta $4x - 3y + 1 = 0$?

22. Mostrar que as curvas cujas equações são $2x^2 + 3y^2 = 5$ e $y^2 = x^3$ interceptam-se no ponto (1, 1) e que suas tangentes nesse ponto são perpendiculares.

23. Calcular a derivada $y' = \dfrac{dy}{dx}$ das seguintes funções definidas na forma paramétrica. Para quais valores de t, y' está definida?

(a) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3, \ t \in (0, +\infty) \end{cases}$ *(b)* $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \operatorname{sen} 2t, \ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4 \operatorname{sen} t, \ t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$ *(d)* $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \operatorname{sen}^3 t, \ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 + 5, \ -\infty < t < +\infty \end{cases}$ *(f)* $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8 \operatorname{sen}^3 t, \ t \in [0, \pi] \end{cases}$

24. Determinar a equação da reta tangente à elipse

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3 \operatorname{sen} t, \ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

no ponto $P\left(\sqrt{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

25. Determinar as equações da reta tangente e da reta normal à astróide

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \operatorname{sen}^3 t, \ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

no ponto $P\left(-\dfrac{1}{8}, \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.

26. Encontrar $\Delta y - dy$ das funções dadas.

a) $y = 3x^2 - x + 1$; *b)* $y = 2\sqrt{x}$; *c)* $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$.

27. Encontrar Δy e dy para os valores dados

a) $y = \dfrac{1}{2x^2}$; $\Delta x = 0{,}001$; $x = 1$;

b) $y = 5x^2 - 6x$; $\Delta x = 0{,}02$; $x = 0$;

c) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$; $\Delta x = 0{,}1$; $x = -1$.

28. Calcular um valor aproximado para as seguintes raízes, usando diferencial.

a) $\sqrt{50}$; *b)* $\sqrt[3]{63{,}5}$; *c)* $\sqrt[4]{13}$.

29. Calcular a diferencial das seguintes funções:

a) $y = \ln(3x^2 - 4x)$; *b)* $y = \dfrac{x+1}{e^x}$; *c)* $y = \operatorname{sen}(5x^2 + 6)$.

30. A área S de um quadrado de lado x é dada por $S = x^2$. Achar o acréscimo e a diferencial desta função e determinar o valor geométrico desta última.

31. Dar a interpretação geométrica do acréscimo e da diferencial da função $S = \pi x^2$ (área do círculo).

32. Uma caixa em forma de um cubo deve ter um revestimento externo com espessura de 1/4 cm. Se o lado da caixa é de 2 m, usando diferencial, encontrar a quantidade de revestimento necessária.

33. Um material está sendo escoado de um recipiente, formando uma pilha cônica cuja altura é sempre igual ao raio da base. Se em dado instante o raio é 12 cm, use diferenciais para obter a variação do raio que origina um aumento de 2 cm^3 no volume da pilha.

34. Use diferenciais para obter o aumento aproximado do volume da esfera quando o raio varia de 3 cm a 3,1 cm.

35. Um terreno, em desapropriação para reforma agrária, tem a forma de um quadrado. Estima-se que cada um de seus lados mede 1.200 m, com um erro máximo de 10 m. Usando diferencial, determinar o possível erro no cálculo da área do terreno.

36. Um pintor é contratado para pintar ambos os lados de 50 placas quadradas de 40 cm de lado. Depois que recebeu as placas verificou que os lados das placas tinham 1/2 cm a mais. Usando diferencial, encontrar o aumento aproximado da porcentagem de tinta a ser usada.