4.7 Exercícios

1. Determinar a equação da reta tangente às seguintes curvas, nos pontos indicados. Esboçar o gráfico em cada caso.

   (*a*) $f(x) = x^2 - 1$; $x = 1$, $x = 0$, $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

   (*b*) $f(x) = x^2 - 3x + 6$; $x = -1$, $x = 2$.

   (*c*) $f(x) = x(3x - 5)$; $x = \frac{1}{2}$, $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

2. Em cada um dos itens do exercício (1), determine a equação da reta normal à curva, nos pontos indicados. Esboçar o gráfico, em cada caso.

3. Determinar a equação da reta tangente à curva $y = 1 - x^2$, que seja paralela à reta $y = 1 - x$. Esboçar os gráficos da função, da reta dada e da reta tangente encontrada.

4. Encontrar as equações das retas tangente e normal à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto $(-2, 9)$.

5. Um corpo se move em linha reta, de modo que sua posição no instante t é dada por $f(t) = 16t + t^2, 0 \leq t \leq 8$, onde o tempo é dado em segundos e a distância em metros.

   (*a*) Achar a velocidade média durante o intervalo de tempo $[b, b + h]$, $0 \leq b < 8$.

   (*b*) Achar a velocidade média durante os intervalos [3; 3,1], [3; 3,01] e [3; 3,001].

   (*c*) Determinar a velocidade do corpo num instante qualquer t.

   (*d*) Achar a velocidade do corpo no instante $t = 3$.

   (*e*) Determinar a aceleração no instante t.

6. Influências externas produzem uma aceleração numa partícula de tal forma que a equação de seu movimento retilíneo é $y = \frac{b}{t} + ct$, onde y é o deslocamento de t, o tempo.

   (*a*) Qual a velocidade da partícula no instante $t = 2$?

   (*b*) Qual é a equação da aceleração?

7. Dadas as funções $f(x) = 5 - 2x$ e $g(x) = 3x^2 - 1$, determinar:

   (*a*) $f'(1) + g'(1)$.

   (*b*) $2f'(0) - g'(-2)$.

   (*c*) $f(2) - f'(2)$.

   (*d*) $[g'(0)]^2 + \frac{1}{2}g'(0) + g(0)$.

   (*e*) $f\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{f'(5/2)}{g'(5/2)}$.

8. Usando a definição, determinar a derivada das seguintes funções:

   (*a*) $f(x) = 1 - 4x^2$.

   (*b*) $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

   (*c*) $f(x) = \frac{1}{x + 2}$.

   (*d*) $f(x) = \frac{1 - x}{x + 3}$.

   (*e*) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$.

   (*f*) $f(x) = \sqrt[3]{x + 3}$.

9. Dadas as funções $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e $g(x) = 2x^2 - 3$, determinar os itens que seguem e, usando uma ferramenta gráfica, fazer um esboço do gráfico das funções obtidas, identificando o seu domínio.

(*a*) $f_0 f'$ (*b*) $f'_0 f$

(*c*) $g_0 f'$ (*d*) $g'_0 f'$

10. Dada a função $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$, verificar se existe $f'(0)$. Esboçar o gráfico.

11. Dada a função $f(x) = \dfrac{1}{2x - 6}$, verificar se existe $f'(3)$. Esboçar o gráfico.

12. Dada a função $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$, determinar os intervalos em que:

(*a*) $f'(x) > 0$. (*b*) $f'(x) < 0$.

13. Simular graficamente diferentes retas tangentes à curva $y = x^2$. Supondo que existem duas retas tangentes que passam pelo ponto $P(0, -4)$, encontrar o ponto de tangência e as equações das retas.

14. Quantas retas tangentes à curva $y = \dfrac{2x}{x+1}$ passam pelo ponto $P(-4, 0)$? Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

4.8 Derivadas Laterais

4.8.1 Definição Se a função $y = f(x)$ está definida em x_1, então a derivada à direita de f em x_1, denotada por $f'_+(x_1)$ é definida por:

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

caso este limite exista.

4.8.2 Definição Se a função $y = f(x)$ está definida em x_1, então a derivada à esquerda de f em x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, é definida por:

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

caso este limite exista.

Uma função é derivável em um ponto, quando as derivadas à direita e à esquerda nesse ponto existem e são iguais.

Quando as derivadas laterais (direita e esquerda) existem e são diferentes em um ponto x_1, dizemos que este é um *ponto anguloso* do gráfico da função.