4ª Etapa. Esta função não tem raízes reais.

5ª Etapa. A função apresenta em seu domínio um ponto de mínimo relativo em $x = 0$.

6ª Etapa. Temos os seguintes intervalos de crescimento e decrescimento:

- decrescimento em $(-\infty, -2)$ e $(-2, 0)$;
- crescimento em $(0, 2)$ e $(2, +\infty)$.

7ª Etapa. A função é côncava para cima no intervalo $(-2, 2)$ e côncava para baixo nos intervalos $(-\infty, -2)$ e $(2, +\infty)$. Apesar de existir a mudança da concavidade, a função não tem pontos de inflexão, pois a mudança de concavidade ocorre em pontos que não pertencem ao domínio da função.

8ª Etapa. Observamos a existência das seguintes assíntotas:

- vertical em $x = -2$ e $x = 2$;
- horizontal em $y = -1$.

Salientamos a partir dos exemplos discutidos que, para fazermos uma análise detalhada do comportamento de uma função, é importante contar com as representações algébrica e gráfica da função.

5.10 Exercícios

1. Em cada um dos seguintes casos, verificar se o Teorema do Valor Médio se aplica. Em caso afirmativo, achar um número c em (a, b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretar geometricamente.

(*a*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = 2, b = 3$.

(*b*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = -1, b = 3$.

(*c*) $f(x) = x^3$; $a = 0, b = 4$.

(*d*) $f(x) = x^3$; $a = -2, b = 0$.

(*e*) $f(x) = \cos x$; $a = 0, b = \pi/2$.

(*f*) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $a = \pi/4, b = 3\pi/4$.

(*g*) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $a = 0, b = \pi/4$.

(*h*) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $a = -1, b = 0$.

(*i*) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $a = -1, b = 1$.

(*j*) $f(x) = |x|$; $a = -1, b = 1$.

2. A função $f(x) = x^{2/3} - 1$ é tal que $f(-1) = f(1) = 0$. Por que ela não verifica o Teorema de Rolle no intervalo $[-1, 1]$?

3. Seja $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$. Mostrar que f satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[-3, 3]$ e determinar os valores de $c \in (-3, 3)$ que satisfaçam $f'(c) = 0$.

4. Usando o teorema do valor médio provar que:

(a) $|\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \alpha| \leq |\theta - \alpha|, \ \forall\, \theta, \alpha \in \mathbb{R}$;

(*b*) $\operatorname{sen} \theta \leq \theta, \ \theta \geq 0$.

5. Determinar os pontos críticos das seguintes funções, se existirem.

(*a*) $y = 3x + 4$.

(*b*) $y = x^2 - 3x + 8$.

(*c*) $y = 2 + 2x - x^2$.

(*d*) $y = (x - 2)(x + 4)$.

(*e*) $y = 3 - x^3$.

(*f*) $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$.

(*g*) $y = x^4 + 4x^3$.

(*h*) $y = \text{sen } x$.

(*i*) $y = \cos x$.

(*j*) $y = \text{sen } x - \cos x$.

(*k*) $y = e^x - x$.

(*l*) $y = (x^2 - 9)^{2/3}$.

(*m*) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

(*n*) $y = |2x - 3|$.

(*o*) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

6. Determinar, algebricamente, os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes. Fazer um esboço do gráfico, comparando os resultados.

(*a*) $f(x) = 2x - 1$.

(*b*) $f(x) = 3 - 5x$.

(*c*) $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$.

(*d*) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$.

(*e*) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

(*f*) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \text{sen } x$.

(*g*) $f(x) = 2^x$.

(*h*) $f(x) = e^{-x}$.

(*i*) $f(x) = xe^{-x}$.

(*j*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

(*k*) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

(*l*) $f(x) = e^x \text{ sen } x,\ x \in [0, 2\pi]$.

7. Determinar os máximos e mínimos das seguintes funções, nos intervalos indicados.

(*a*) $f(x) = 1 - 3x, [-2, 2]$.

(*b*) $f(x) = x^2 - 4, [-1, 3]$.

(*c*) $f(x) = 4 - 3x + 3x^2, [0, 3]$.

(*d*) $f(x) = x^3 - x^2, [0, 5]$.

(*e*) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}, [-2, 2]$.

(*f*) $f(x) = |x - 2|, [1, 4]$.

(*g*) $f(x) = \cosh x,\ [-2, 2]$.

(*h*) $f(x) = \text{tgh } x, [-2, 2]$.

(*i*) $f(x) = \cos 3x, [0, 2\pi]$.

(*j*) $f(x) = \cos^2 x, [0, 2\pi]$.

(*k*) $f(x) = \text{sen}^3 x - 1, [0, \pi/2]$.

8. Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento, os máximos e os mínimos relativos das seguintes funções.

(*a*) $f(x) = 2x + 5$.

(*b*) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$.

(*c*) $g(x) = 4x^3 - 8x^2$.

(*d*) $h(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 5$.

(*e*) $f(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1}$.

(*f*) $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$.

(g) $g(x) = x\, e^x$.

(h) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

(i) $f(x) = |2 - 6x|$.

(j) $g(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq -2 \\ x^2 - 2, & x > -2 \end{cases}$.

(k) $h(t) = \begin{cases} 3 - 4t, & t > 0 \\ 4t + 3, & t \leq 0 \end{cases}$.

(l) $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < -1 \\ 1 - x^2, & x \geq -1 \end{cases}$.

(m) $g(x) = \begin{cases} 10 - (x - 3)^2, & x \leq -2 \\ 5(x - 1), & -2 < x \leq -1. \\ -\sqrt{91 + (x - 2)^2}, & x > -1 \end{cases}$

9. Encontrar os pontos de máximo e mínimo relativos das seguintes funções, se existirem. Fazer um esboço do gráfico e comparar os resultados.

(a) $f(x) = 7x^2 - 6x + 3$.

(b) $g(x) = 4x - x^2$.

(c) $h(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 9$.

(d) $h(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + 8$.

(e) $f(t) = \begin{cases} t^2, & t < 0 \\ 3t^2, & t \geq 0. \end{cases}$

(f) $f(x) = 6x^{2/3} - 2x$.

(g) $f(x) = 5 + (x - 2)^{7/5}$.

(h) $f(x) = 3 + (2x + 3)^{4/3}$.

(i) $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$.

(j) $h(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x + 2}$.

(k) $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^3$.

(l) $f(x) = x^2\sqrt{16 - x}$.

10. Mostrar que $y = \dfrac{\log_a x}{x}$ tem seu valor máximo em $x = e$ (número neperiano) para todos os números $a > 1$.

11. Determinar os coeficientes a e b de forma que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenha um extremo relativo no ponto $(-2, 1)$.

12. Encontrar a, b, c e d tal que a função $f(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$ tenha pontos críticos em $x = 0$ e $x = 1$. Se $a > 0$, qual deles é ponto de máximo, qual é ponto de mínimo?

13. Demonstrar que a função $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, tem máximo se, e somente se, $a < 0$; e mínimo se, e somente se, $a > 0$.

14. Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

(a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$.

(b) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x + 4}$.

(d) $f(x) = 2x\, e^{-3x}$.

(e) $f(x) = x^2 e^x$.

(f) $f(x) = 4\sqrt{x + 1} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 1$.

(g) $f(t) = \dfrac{t^2 + 9}{(t - 3)^2}$.

(h) $f(t) = e^{-t}\cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

(*i*) $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$

(*j*) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 2 \\ 4 - x^2, & x > 2 \end{cases}$

15. Seguindo as etapas apresentadas em 5.9.1, fazer um esboço do gráfico das seguintes funções:

(*a*) $y = x^2 + 4x + 2$

(*b*) $y = \dfrac{-x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 2x + \dfrac{5}{6}$

(*c*) $y = \dfrac{-1}{4}x^4 + \dfrac{5}{3}x^3 - 2x^2$

(*d*) $y = x + \dfrac{2}{x}$

(*e*) $y = \dfrac{3x + 1}{(x + 2)(x - 3)}$

(*f*) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x + 2}}$

(*g*) $y = x^{3/2}$

(*h*) $y = \ln(2x + 3)$

16. Usando uma ferramenta gráfica, construir o gráfico das funções seguintes, analisando suas propriedades e características como apresentado em 5.9.3.

(*a*) $y = (x - 3)(x + 2)$

(*b*) $y = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 - 12x + 3$

(*c*) $y = x^4 - 32x + 48$

(*d*) $y = \dfrac{2x}{x + 2}$

(*e*) $y = \dfrac{2}{x^2 - 2x - 3}$

(*f*) $y = \cosh x$

(*g*) $y = e^{x - x^2}$

(*h*) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

(*i*) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

(*j*) $f(x) = x^2 \ln x$

(*k*) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

(*l*) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 1}}$

5.11 Problemas de Maximização e Minimização

A seguir apresentamos alguns problemas práticos em diversas áreas, onde aplicamos o que foi visto nas Seções 5.4 e 5.7 sobre máximos e mínimos.

O primeiro passo para solucionar estes problemas é escrever precisamente qual a função que deverá ser analisada. Esta função poderá ser escrita em função de uma ou mais variáveis. Quando a função é de mais de uma variável, devemos procurar expressar uma das variáveis em função da outra.

Com a função bem definida, devemos identificar um intervalo apropriado e então proceder a rotina matemática aplicando definições e teoremas.

5.11.1 Exemplos

(1) Na Biologia, encontramos a fórmula $\phi = V \cdot A$, onde ϕ é o fluxo de ar na traquéia, V é a velocidade do ar e A a área do círculo formado ao seccionarmos a traquéia (ver Figura 5.34).

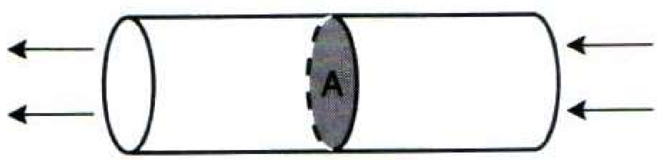

Figura 5.34