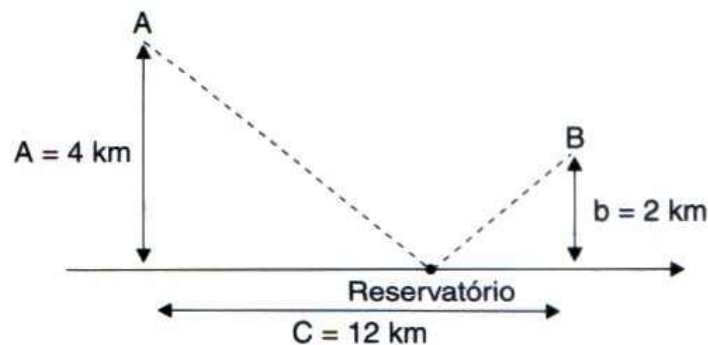


5.12 Exercícios

- Um fio de comprimento l é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro, um quadrado.
 - Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja mínima?
 - Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das áreas compreendidas seja máxima?
- Determinar o ponto P situado sobre o gráfico da hipérbole $xy = 1$, que está mais próximo da origem.
- Um fazendeiro tem 200 bois, cada um pesando 300 kg. Até agora ele gastou R\$ 380.000,00 para criar os bois e continuará gastando R\$ 2,00 por dia para manter um boi. Os bois aumentam de peso a uma razão de 1,5 kg por dia. Seu preço de venda, hoje, é de R\$ 18,00 o quilo, mas o preço cai 5 centavos por dia. Quantos dias deveria o fazendeiro aguardar para maximizar seu lucro?
- Achar dois números positivos cuja soma seja 70 e cujo produto seja o maior possível.
- Usando uma folha quadrada de cartolina, de lado a , deseja-se construir uma caixa sem tampa, cortando em seus cantos quadrados iguais e dobrando convenientemente a parte restante. Determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados de modo que o volume da caixa seja o maior possível.
- Determinar as dimensões de uma lata cilíndrica, com tampa, com volume V , de forma que a sua área total seja mínima.
- Duas indústrias A e B necessitam de água potável. A figura a seguir esquematiza a posição das indústrias, bem como a posição de um encanamento retilíneo l , já existente. Em que ponto do encanamento deve ser instalado um reservatório de modo que a metragem de cano a ser utilizada seja mínima?

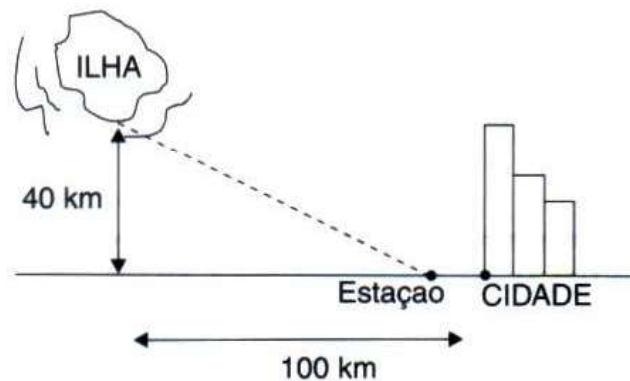


- O custo e a receita total com a produção e comercialização de um produto são dados por:

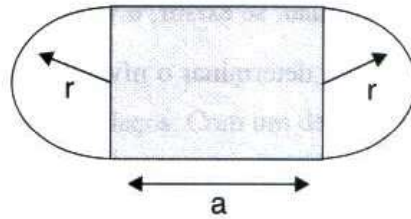
$$C(q) = 600 + 2,2q$$

$$R(q) = 10q - 0,006q^2$$
 sendo $0 \leq q \leq 900$.
 - Encontrar a quantidade q que maximiza o lucro com a venda desse produto.
 - Qual o nível de produção que minimiza o lucro?
 - Qual o nível de produção correspondente ao prejuízo máximo?
- O gráfico da função $C(q) = Kq^{1/\alpha} + F$, $q \in [q_0, q_1]$, sendo K , α e F constantes positivas, é denominado curva de custos a curto prazo de Cobb-Douglas. Essa curva é bastante utilizada para representar os custos de uma empresa com a produção de um produto.
 - Dar o significado da constante F .
 - Verificar que, quando $\alpha > 1$, a curva é côncava para baixo e interpretar esse resultado do ponto de vista da Economia.

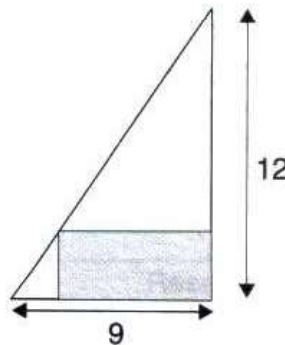
- (c) Supor $K = 2$, $\alpha = 3$ e $F = 8$ e determinar, se existir, o valor de q que fornece o custo médio mínimo.
- (d) Usando os mesmos valores do item (c), determinar o nível de produção que minimiza o custo marginal, no intervalo $125 \leq q \leq 125.000$.
10. Qual é o retângulo de perímetro máximo inscrito no círculo de raio 12 cm?
11. Traçar uma tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 2$ de modo que a área do triângulo que ela forma com os eixos coordenados positivos seja mínima. Obter as coordenadas do ponto de tangência e a área mínima.
12. Mostrar que o volume do maior cilindro reto que pode ser inscrito num cone reto é $4/9$ do volume do cone.
13. Um cone reto é cortado por um plano paralelo à sua base. A que distância da base deve ser feito esse corte, para que o cone reto de base na secção determinada, e de vértice no centro da base do cone dado tenha volume máximo?
14. Determinar o ponto A da curva $y = x^2 + x$ que se encontra mais próximo de $(7, 0)$. Mostrar que a reta que passa por $(7, 0)$ e por A é normal à curva dada em A .
15. Uma folha de papel contém 375 cm^2 de matéria impressa, com margem superior de 3,5 cm, margem inferior de 2 cm, margem lateral direita de 2 cm e margem lateral esquerda de 2,5 cm. Determinar quais devem ser as dimensões da folha para que haja o máximo de economia de papel.
16. Uma janela tem a forma de um retângulo encimado por um semicírculo. Achar as dimensões de modo que o perímetro seja 3,2 m e a área a maior possível.
17. Um canhão, situado no solo, é posto sob um ângulo de inclinação α . Seja l o alcance do canhão, dado por $l = \frac{2v^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?
18. Uma agência de turismo está organizando um serviço de barcas, de uma ilha situada a 40 km de uma costa quase reta, para uma cidade que dista 100 km, como mostra a figura a seguir. Se a barca tem uma velocidade de 18 km por hora e os carros têm uma velocidade média de 50 km/h, onde deverá estar situada a estação das barcas a fim de tornar a viagem a mais rápida possível?



19. Uma cerca de 1 m de altura está situada a uma distância de 1 m da parede lateral de um galpão. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam na parede e no chão do lado de fora da cerca?
20. Seja s uma reta que passa pelo ponto $(4, 3)$ formando um triângulo com os eixos coordenados positivos. Qual a equação de s para que a área desse triângulo seja mínima?
21. Uma pista de atletismo com comprimento total de 400 m consiste de 2 semicírculos e dois segmentos retos, conforme figura a seguir. Determinar as dimensões da pista, de tal forma que a área retangular, demarcada na figura, seja máxima.



22. Um cilindro circular reto está inscrito num cone circular reto de altura $H = 6$ m e raio da base $R = 3,5$ m. Determinar a altura e o raio da base do cilindro de volume máximo.
23. Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por $C = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 60$ e o valor obtido na venda é dado por $R = 60x - 12x^2$, determinar o número ótimo de unidades mensais que maximiza o lucro $L = R - C$.
24. Um cilindro reto é inscrito numa esfera de raio R . Determinar esse cilindro, de forma que seu volume seja máximo.
25. Um fazendeiro deve cercar dois pastos retangulares, de dimensões a e b , com um lado comum a . Se cada pasto deve medir 400 m^2 de área, determinar as dimensões a e b , de forma que o comprimento da cerca seja mínimo.
26. Um fabricante, ao comprar caixas de embalagens retangulares exige que o comprimento de cada caixa seja 2 m e o volume 3 m^3 . Para gastar a menor quantidade de material possível na fabricação de caixas, quais devem ser suas dimensões.
27. Um retângulo é inscrito num triângulo retângulo de catetos que mede 9 cm e 12 cm. Encontrar as dimensões do retângulo com maior área, supondo que sua posição é dada na figura a seguir.



5.13 Regras de L'Hôpital

Nesta seção apresentaremos um método geral para levantar indeterminações do tipo $0/0$ ou ∞/∞ . Esse método é dado pelas regras de L'Hospital, cuja demonstração necessita da seguinte proposição.

5.13.1 Proposição (Fórmula de Cauchy) Se f e g são duas funções contínuas em $[a, b]$, deriváveis em (a, b) e se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então existe um número $z \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Prova: Provemos primeiro que $g(b) - g(a) \neq 0$. Como g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , pelo teorema do valor médio, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad (1)$$