$$= \frac{1/2}{1}$$
$$= 1/2.$$

Portanto, $\ln L = \dfrac{1}{2}$ e dessa forma $L = e^{1/2}$. Logo,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = e^{1/2}.$$

5.14 Exercícios

Determinar os seguintes limites com auxílio das regras de L'Hospital.

1. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$

2. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3}$

3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 6x}{x^3 + 7x^2 + 5x}$

4. $\displaystyle\lim_{x \to 1/2} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 4x + 1}$

5. $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{6 - 2x + 3x^2 - x^3}{x^4 - 3x^3 - x + 3}$

6. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 1}$

7. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 6x + 7}{x^3 + 7x - 1}$

8. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{5 - 5x^3}{2 - 2x^3}$

9. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{7x^5 - 6}{4x^2 - 2x + 4}$

10. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{5 - x + x^2}{2 - x - 2x^2}$

11. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

12. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{99}}{e^x}$

13. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - \cos x}$

14. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2(e^{1/x} - 1)$

15. $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{(x - \pi/2)^2}$

16. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{2^x - 1}$

17. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2x - 4} - \frac{1}{x - 2}\right)$

18. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{x}{x + 1}\right)$

19. $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{x}{\operatorname{cotg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$

20. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \operatorname{tgh} x$

21. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{sen} x}$

22. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

23. $\displaystyle\lim_{x \to \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$

24. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$

25. $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) \operatorname{cotg} x$

26. $\displaystyle\lim_{x \to 1} [\ln x \ln (x - 1)]$

27. $\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$

28. $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{x^4+\ln x}}$

29. $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

30. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

31. $\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

32. $\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen} \pi/x$

33. $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^{2/3}}{(x^2+2)^{1/3}}$

34. $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{\operatorname{senh} x}{x}$

35. $\lim_{x\to +\infty}(2x-1)^{2/x}$

36. $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$

37. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\operatorname{sen} ax)}{\ln(\operatorname{sen} x)}$

38. $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$

39. $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$

40. $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{2+\ln x}}$

41. $\lim_{x\to \pi/4}(1-\operatorname{tg} x)\sec 2x$

42. $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x\ln x}{x+\ln x}$

43. $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$.

5.15 Fórmula de Taylor

A Fórmula de Taylor consiste num método de aproximação de uma função por um polinômio, com um erro possível de ser estimado.

5.15.1 Definição Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas até ordem n num ponto c do intervalo I. O *polinômio de Taylor* de ordem n de f no ponto c, que denotamos por $P_n(x)$, é dado por:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Observamos que no ponto $x = c$, $P_n(c) = f(c)$.

5.15.2 Exemplo Determinar o polinômio de Taylor de ordem 4 da função $f(x) = e^x$ no ponto $c = 0$.

Temos, $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(iv)}(x) = e^x$ e assim

$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(iv)}(0) = e^0 = 1.$

Portanto,

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}, \end{aligned}$$

é o polinômio de Taylor de grau 4 da função $f(x) = e^x$ no ponto $c = 0$.