Então,

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int_1^2 \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

(v) $\displaystyle\int_1^2 x e^{-x^2+1}dx.$

Calculamos primeiro a integral indefinida $I = \displaystyle\int x e^{-x^2+1}dx.$

Fazendo $u = -x^2+1$, temos $du = -2x\,dx$ ou $x\,dx = -\dfrac{du}{2}\cdot$ Assim:

$$I = \int e^u \cdot \frac{-du}{2} = \frac{-1}{2}\int e^u du = \frac{-1}{2}e^u + c$$

$$= \frac{-1}{2}e^{-x^2+1} + c.$$

Logo,

$$\int_1^2 x e^{-x^2+1}dx = \frac{-1}{2}e^{-x^2+1}\Big|_1^2 = \frac{-1}{2}e^{-4+1} + \frac{1}{2}e^{-1+1} = \frac{-1}{2}e^{-3} + \frac{1}{2}\cdot$$

6.11 Exercícios

1. Calculando as integrais $I_1 = \displaystyle\int_1^2 x^2dx, I_2 = \int_1^2 x\,dx$ e $I_3 = \displaystyle\int_1^2 dx$, obtemos $I_1 = 7/3, I_2 = 3/2$ e $I_3 = 1$. Usando esses resultados, encontrar o valor de :

a) $\displaystyle\int_1^2 (6x-1)dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 2x(x+1)\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2)dx$

d) $\displaystyle\int_1^2 (3x+2)^2dx.$

2. Sem calcular a integral, verificar as seguintes desigualdades:

a) $\displaystyle\int_1^3 \left(3x^2+4\right)dx \geq \int_1^3 (2x^2+5)dx$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{dx} \leq \int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right)dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \geq 0$

d) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\cos x\,dx \geq 0.$

3. Se $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[5]{x^2}dx = \frac{5}{7}$, calcular $\displaystyle\int_1^0 \sqrt[5]{t^2}dt.$

4. Se $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 9\cos^2 t\,dt = \frac{9\pi}{4}$, calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} -\cos^2\theta\,d\theta.$

5. Verificar se o resultado das seguintes integrais é positivo, negativo ou zero, sem calculá-las.

a) $\displaystyle\int_0^{20} \frac{dx}{x+2}$ *b)* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\,dt$

c) $\displaystyle\int_2^{3} (2x+1)\,dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-1}^{3} (x^2-2x-3)\,dx.$

6. Determinar as seguintes derivadas:

a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_2^{x} \sqrt{t+4}\,dt$ *b)* $\displaystyle\frac{d}{dy}\int_3^{y} \frac{2x}{x^2+9}\,dx$

c) $\displaystyle\frac{d}{d\theta}\int_{-1}^{\theta} t\operatorname{sen} t\,dt.$

7. Em cada um dos itens a seguir, calcular a integral da função no intervalo dado e esboçar seu gráfico.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & -1 \le x < 0 \\ 5, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$; em $[-1, 1]$

b) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$; em $[-\pi, \pi]$ *c)* $f(x) = 2|x|$; em $[-1, 1]$

d) $f(x) = x - \dfrac{|x|}{2}$; em $[-1, 1]$ *e)* $f(x) = \operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|$; em $[-\pi, \pi]$

f) $f(x) = \operatorname{sen} x + |\cos x|$, em $[-\pi, \pi]$.

8. Mostrar que:

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2x \cos 5x\,dx = 0$ *b)* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 3x\,dx = 0$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 5x \cos 2x\,dx = 0.$

(*Sugestão:* Usar as fórmulas

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x] \text{ e}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

onde m e n são dois números inteiros quaisquer.)

9. Se $f(x)$ é contínua e $f(x) \le M$ para todo x em $[a, b]$, provar que:

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$. Ilustrar graficamente, supondo $f(x) \ge 0$.

10. Se $f(x)$ é contínua e $m \le f(x)$ para todo x em $[a, b]$, provar que:

$m(b-a) \le \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Ilustrar graficamente, supondo $m > 0$.

11. Aplicar os resultados dos exercícios 9 e 10 para encontrar o menor e o maior valor possível das integrais dadas a seguir:

a) $\int_3^4 5x\,dx$ *b)* $\int_{-2}^4 2x^2 dx$

c) $\int_1^4 |x-1|\,dx$ *d)* $\int_{-1}^4 (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx.$

Nos exercícios 12 a 34, calcular as integrais.

12. $\int_{-1}^2 x(1+x^3)\,dx$

13. $\int_{-3}^0 (x^2 - 4x + 7)\,dx$

14. $\int_1^2 \frac{dx}{x^6}$

15. $\int_4^9 2t\sqrt{t}\,dt$

16. $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{3y+1}}$

17. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

18. $\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+9}}$

19. $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx$

20. $\int_{-2}^5 |2t-4|\,dt$

21. $\int_0^4 |x^2 - 3x + 2|\,dx$

22. $\int_0^4 \frac{4}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

23. $\int_{-2}^0 \frac{v^2 dv}{(v^3-2)^2}$

24. $\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx$

25. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}$

26. $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$

27. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$

28. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^5}\,dx$

29. $\int_0^4 (2x+1)^{-1/2} dx$

30. $\int_0^2 \sqrt{2}x(\sqrt{x}+\sqrt{5})\,dx$

31. $\int_1^2 \frac{5x^3 + 7x^2 - 5x + 2}{x^2}\,dx$

32. $\int_1^2 x \ln x\,dx$

33. $\int_{-3}^{-2} \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 dt$

34. $\int_0^{-1} \frac{x^3+8}{x+2}\,dx.$

35. Seja f contínua em $[-a, a]$. Mostrar que:

a) Se f é par, então $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$ *b)* Se f é ímpar, então $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$

36. Usar o resultado do Exercício 35 para calcular:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} 2 \operatorname{sen} x \, dx$ *b)* $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\pi} \, dx$

c) $\int_{-1}^{1} (x^4 + x^2) dx.$

6.12 Cálculo de Áreas

O cálculo de área de figuras planas pode ser feito por integração. Vejamos as situações que comumente ocorrem.

6.12.1 Caso I Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \geq 0$, $\forall \ x \in [a, b]$ (ver Figura 6.11).

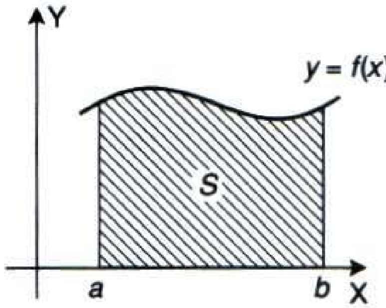

Figura 6.11

Neste caso, a área é dada por:

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

6.12.2 Exemplo Encontre a área limitada pela curva $y = 4 - x^2$ e o eixo dos x.

A curva $y = 4 - x^2$ intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissa -2 e 2 (ver Figura 6.12).

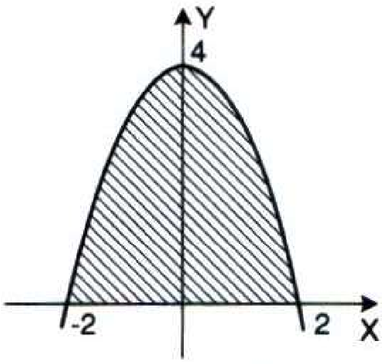

Figura 6.12

No intervalo $[-2, 2]$, $y = 4 - x^2 \geq 0$. Assim, a área procurada é a área sob o gráfico de $y = 4 - x^2$ de -2 até 2.

Temos: