6.2 Exercícios

Nos exercícios de 1 a 10, calcular a integral e, em seguida, derivar as respostas para conferir os resultados.

1. $\int \frac{dx}{x^3}$

2. $\int \left(9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^3}}\right)dt$

3. $\int (ax^4 + bx^3 + 3c)dx$

4. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{3}\right)dx$

5. $\int (2x^2 - 3)^2 dx$

6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

7. $\int \left(\sqrt{2y} - \frac{1}{\sqrt{2y}}\right)dy$

8. $\int \frac{\sqrt{2}dt}{3t^2 + 3}$

9. $\int x^3 \sqrt{x}\, dx$

10. $\int \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4}\, dx$

Nos exercícios de 11 a 31, calcular as integrais indefinidas.

11. $\int \frac{x^2}{x^2 + 1}\, dx$

12. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2}\, dx$

13. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$

14. $\int \sqrt{\frac{9}{1 - x^2}}\, dx$

15. $\int \sqrt{\frac{4}{x^4 - x^2}}\, dx$

16. $\int \frac{8x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 2x + 1}{x^2}\, dx$

17. $\int \left(\frac{e^t}{2} + \sqrt{t} + \frac{1}{t}\right)dt$

18. $\int \cos\theta \cdot \operatorname{tg}\theta\, d\theta$

19. $\int (e^x - e^{-x})dx$

20. $\int (t + \sqrt{t} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[4]{t} + \sqrt[5]{t})dt$

21. $\int \frac{x^{-1/3} - 5}{x}\, dx$

22. $\int (2^t - \sqrt{2}\, e^t + \cosh t)dt$

23. $\int \sec^2 x(\cos^3 x + 1)dx$

24. $\int \frac{dx}{(ax)^2 + a^2}$, $a \neq 0$, constante.

25. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$

26. $\int \sqrt[3]{8(t-2)^6\left(t + \frac{1}{2}\right)^3}\, dt$

27. $\int \left(e^t - \sqrt[4]{16t} + \frac{3}{t^3}\right)dt$

28. $\int \frac{\ln x}{x \ln x^2}\, dx$

29. $\int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx$

30. $\int (x - 1)^2(x + 1)^2 dx$

31. $\int \frac{dt}{(n - 1/2)t^n}$, onde $n \in Z$.

32. Encontrar uma primitiva F, da função $f(x) = x^{2/3} + x$, que satisfaça $F(1) = 1$.

33. Determinar a função $f(x)$ tal que

$$\int f(x)dx = x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x + c.$$

34. Encontrar uma primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$ que se anule no ponto $x = 2$.

35. Sabendo que a função $f(x)$ satisfaz a igualdade

$$\int f(x)dx = \text{sen}\, x - x\cos x - \frac{1}{2}x^2 + c, \text{ determinar } f(\pi/4).$$

36. Encontrar uma função f tal que $f'(x) + \text{sen}\, x = 0$ e $f(0) = 2$.

6.3 Método da Substituição ou Mudança de Variável para Integração

Algumas vezes, é possível determinar a integral de uma dada função aplicando uma das fórmulas básicas depois de ser feita uma mudança de variável. Esse processo é análogo à regra da cadeia para derivação e pode ser justificado como segue.

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funções tais que $F'(x) = f(x)$. Suponhamos que g seja outra função derivável tal que a imagem de g esteja contida no domínio de F. Podemos considerar a função composta $F_0 g$.

Pela regra da cadeia, temos:

$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, isto é, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Temos, então:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c. \qquad (1)$$

Fazendo $u = g(x), du = g'(x)dx$ e substituindo em (1), vem:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)\, du = F(u) + c.$$

Na prática, devemos então definir uma função $u = g(x)$ conveniente, de tal forma que a integral obtida seja mais simples.

6.3.1 Exemplos Calcular as integrais:

(i) $\displaystyle\int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx.$

Fazemos $u = 1 + x^2$. Então, $du = 2x\,dx$. Temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx &= \int \frac{du}{u}\\ &= \ln|u| + c\\ &= \ln(1 + x^2) + c.\end{aligned}$$