Substituindo na integral, vem:

$$\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,dx = \int \frac{u}{u^2+2+1}\cdot 2u\ du$$
$$= \int \frac{2u^2\,du}{u^2+3} = 2\int \frac{u^2\,du}{u^2+3}.$$

Efetuando a divisão dos polinômios, temos:

$$\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,dx = 2\int\left(1+\frac{-3}{u^2+3}\right)du$$
$$= 2\left[\int du - 3\int\frac{du}{u^2+3}\right]$$
$$= 2u - 6\int\frac{du}{u^2+3}$$
$$= 2u - \frac{6}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{u}{\sqrt{3}} + c$$
$$= 2\sqrt{x-2} - \frac{6}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3}} + c.$$

(x) $\int \sqrt{t^2-2t^4}\,dt.$

Escrevemos:

$$\int \sqrt{t^2-2t^4}\,dt = \int\sqrt{t^2(1-2t^2)}\,dt = \int t\sqrt{1-2t^2}\,dt.$$

Fazendo $u = 1-2t^2$, temos $du = -4t\,dt$ e então $t\,dt = \frac{-du}{4}$. Assim:

$$\int\sqrt{t^2-2t^4}dt = \int u^{1/2}\cdot\frac{-du}{4} = -\frac{1}{4}\int u^{1/2}du$$
$$= -\frac{1}{4}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{-1}{6}(1-2t^2)^{3/2} + c.$$

6.4 Exercícios

Calcular as integrais seguintes usando o método da substituição.

1. $\int (2x^2+2x-3)^{10}(2x+1)dx$

2. $\int (x^3-2)^{1/7}x^2\,dx$

3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{x^2-1}}$

4. $\int 5x\sqrt{4-3x^2}\,dx$

5. $\int \sqrt{x^2+2x^4}\,dx$

6. $\int (e^{2t}+2)^{1/3}e^{2t}dt$

7. $\int \frac{e^t\,dt}{e^t+4}$

8. $\int \frac{e^{1/x}+2}{x^2}\,dx$

9. $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x \, dx$

10. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx$

11. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x} \, dx$

12. $\int \dfrac{2 \operatorname{sen} x - 5 \cos x}{\cos x} \, dx$

13. $\int e^x \cos 2e^x dx$

14. $\int \dfrac{x}{2} \cos x^2 dx$

15. $\int \operatorname{sen}(5\theta - \pi) d\theta$

16. $\int \dfrac{\operatorname{arc\,sen} y}{2\sqrt{1 - y^2}} \, dy$

17. $\int \dfrac{2 \sec^2 \theta}{a + b \operatorname{tg} \theta} \, d\theta$

18. $\int \dfrac{dx}{16 + x^2}$

19. $\int \dfrac{dy}{y^2 - 4y + 4}$

20. $\int \sqrt[3]{\operatorname{sen} \theta} \cos \theta \, d\theta$

21. $\int \dfrac{\ln x^2}{x} \, dx$

22. $\int (e^{ax} + e^{-ax})^2 dx$

23. $\int \sqrt{3t^4 + t^2} dt$

24. $\int \dfrac{4dx}{4x^2 + 20x + 34}$

25. $\int \dfrac{3 \, dx}{x^2 - 4x + 1}$

26. $\int \dfrac{e^x dx}{e^{2x} + 16}$

27. $\int \dfrac{\sqrt{x + 3}}{x - 1} \, dx$

28. $\int \dfrac{3 \, dx}{x \ln^2 3x}$

29. $\int (\operatorname{sen} 4x + \cos 2\pi) dx$

30. $\int 2^{x^2 + 1} x \, dx$

31. $\int x e^{3x^2} dx$

32. $\int \dfrac{dt}{(2 + t)^2}$

33. $\int \dfrac{dt}{t \ln t}$

34. $\int 8x\sqrt{1 - 2x^2} \, dx$

35. $\int (e^{2x} + 2)^5 e^{2x} dx$

36. $\int \dfrac{4t \, dt}{\sqrt{4t^2 + 5}}$

37. $\int \dfrac{\cos x}{3 - \operatorname{sen} x} \, dx$

38. $\int \dfrac{dv}{\sqrt{v}(1 + \sqrt{v})^5}$

39. $\int x^2\sqrt{1 + x} \, dx$

40. $\int x^4 e^{-x^5} dx$

41. $\int t \cos t^2 dt$

42. $\int 8x^2\sqrt{6x^3 + 5} \, dx$

43. $\int \operatorname{sen}^{1/2} 2\theta \cos 2\theta \, d\theta$

44. $\int \sec^2(5x + 3) dx$

45. $\int \dfrac{\operatorname{sen} \theta \, d\theta}{(5 - \cos \theta)^3}$

46. $\int \operatorname{cotg} u \, du$

47. $\int (1 + e^{-at})^{3/2} e^{-at} dt,\ a > 0$

48. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

49. $\int t\sqrt{t - 4}\, dt$

50. $\int x^2(\operatorname{sen} 2x^3 + 4x)dx$

6.5 Método de Integração por Partes

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis no intervalo I. Temos:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

ou,

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - g(x) \cdot f'(x).$$

Integrando ambos os lados dessa equação, obtemos:

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = \int [f(x) \cdot g(x)]'dx - \int g(x) \cdot f'(x)dx,$$

ou ainda,

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x)dx. \tag{1}$$

Observamos que na expressão (1) deixamos de escrever a constante de integração, já que no decorrer do desenvolvimento aparecerão outras. Todas elas podem ser representadas por uma única constante c, que introduziremos no final do processo.

Na prática, costumamos fazer

$$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$$

e

$$v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x)dx.$$

Substituindo em (1), vem

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du,$$

que é a fórmula de integração por partes.

6.5.1 Exemplos

(i) Calcular $\int xe^{-2x}dx$.

Antes de resolver essa integral, queremos salientar que a escolha de u e dv são feitas convenientemente.

Nesse exemplo, escolhemos $u = x$ e $dv = e^{-2x}\, dv$. Temos:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^{-2x}\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int e^{-2x}\, dx = \frac{-1}{2} e^{-2x}.$$

Aplicamos, então, a fórmula

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$