$$= -\text{sen}^2 x \cos x + 2\int \cos^2 x \,\text{sen}\, x\, dx$$

$$= -\text{sen}^2 x \cos x - 2\,\frac{\cos^3 x}{3} + c.$$

6.6 Exercícios

Resolver as seguintes integrais usando a técnica de integração por partes.

1. $\int x \,\text{sen}\, 5x\, dx$
2. $\int \ln(1 - x)\, dx$
3. $\int t\, e^{4t} dt$
4. $\int (x + 1)\cos 2x\, dx$
5. $\int x \ln 3x\, dx$
6. $\int \cos^3 x\, dx$
7. $\int e^x \cos\frac{x}{2}\, dx$
8. $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$
9. $\int \text{cosec}^3 x\, dx$
10. $\int x^2 \cos ax\, dx$
11. $\int x\,\text{cosec}^2 x\, dx$
12. $\int \text{arc cotg}\, 2x\, dx$
13. $\int e^{ax}\,\text{sen}\, bx\, dx$
14. $\int \frac{\ln(ax + b)}{\sqrt{ax + b}}\, dx$
15. $\int x^3\sqrt{1 - x^2}\, dx$
16. $\int \ln^3 2x\, dx$
17. $\int \text{arc tg}\, ax\, dx$
18. $\int x^3\,\text{sen}\, 4x\, dx$
19. $\int (x - 1)e^{-x} dx$
20. $\int x^2 \ln x\, dx$
21. $\int x^2 e^x dx$
22. $\int \text{arc sen}\,\frac{x}{2}\, dx$
23. $\int (x - 1)\sec^2 x\, dx$
24. $\int e^{3x}\cos 4x\, dx$
25. $\int x^n \ln x\, dx,\ n \,\varepsilon\, N$
26. $\int \ln(x^2 + 1)\, dx$
27. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\, dx$
28. $\int x\,\text{arc tg}\, x\, dx$

29. $\int x^5 e^{x^2} dx$

30. $\int x \cos^2 x \, dx$

31. $\int (x + 3)^2 e^x dx$

32. $\int x\sqrt{x + 1}\, dx$

33. $\int \cos(\ln x) dx$

34. $\int \text{arc cos } x \, dx$

35. $\int \sec^3 x \, dx$

36. $\int \frac{1}{x^3} e^{1/x} dx.$

6.7 Área

Desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupam com o problema de determinar a área de uma figura plana. O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas.

Como exemplo, podemos citar o círculo. Para definir sua área, consideramos um polígono regular inscrito de n lados, que denotamos por P_n (Figura 6.2(a)).

Seja A_n a área do polígono P_n. Então, $A_n = n \cdot A_{T_n}$, onde A_{T_n} é a área do triângulo de base l_n e altura h_n (Figura 6.2(b)).

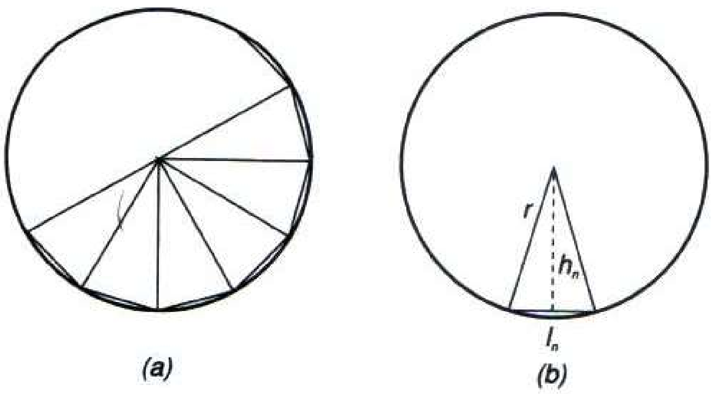

Figura 6.2

Como $A_{T_n} = \dfrac{l_n \cdot h_n}{2}$ e o perímetro do polígono P_n é dado por $p_n = nl_n$, vem:

$$A_n = n \cdot \frac{l_n \cdot h_n}{2} = \frac{p_n \cdot h_n}{2}.$$

Fazendo n crescer cada vez mais, isto é, $n \to +\infty$, o polígono P_n torna-se uma aproximação do círculo. O perímetro p_n aproxima-se do comprimento da circunferência $2\pi r$ e a altura h_n aproxima-se do raio r.

Temos:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2, \text{ que é a área do círculo.}$$

Para definir a área de uma figura plana qualquer, procedemos de forma análoga. Aproximamos a figura por polígonos cujas áreas possam ser calculadas pelos métodos da geometria elementar.

Consideremos agora o problema de definir a área de uma região plana S, delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa f, pelo eixo dos x e por duas retas $x = a$ e $x = b$ (ver Figura 6.3).