Da identidade trigonométrica

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

vem que

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta = \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\cdot\frac{4}{x}.$$

Para substituirmos o valor de θ, devemos tomar algum cuidado. Inicialmente, observamos que a função integrando está definida para valores de $x > 4$ e $x < -4$.

Para $x > 4$, temos que $\sec\theta = \frac{x}{4} > 1$ e, portanto, $\theta = \operatorname{arc\,sec}\frac{x}{4}$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

Para $x < -4$, temos que $\sec\theta = \frac{x}{4} < -1$ e sua inversa $\left(\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{4}\right)$ toma valores entre $\frac{\pi}{2}$ e π (ver Seção 2.15.4).

Como, ao fazermos a substituição $x = 4\sec\theta$, assumimos que $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$ e, como $\sec(2\pi - a) = \sec a$, para $x < -4$, podemos escrever $\theta = 2\pi - \operatorname{arc\,sec}\frac{x}{4}$, $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Portanto, para $x > 4$, temos:

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-16}} = \frac{1}{128}\left(\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{4} + \frac{4\sqrt{x^2-16}}{x^2}\right) + C$$

e, para $x < -4$,

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-16}} = \frac{1}{128}\left(2\pi - \operatorname{arc\,sec}\frac{x}{4} + \frac{4\sqrt{x^2-16}}{x^2}\right) + C_1$$

$$= \frac{1}{128}\left(-\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{4} + \frac{4\sqrt{x^2-16}}{x^2}\right) + C,$$

onde $C = \frac{\pi}{64} + C_1$.

7.4 Exercícios

Nos exercícios 1 a 35, calcular a integral indefinida.

1. $\int\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

2. $\int\cos x\cdot\cos(\operatorname{sen} x)\,dx$

3. $\int\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x}\,dx$

4. $\int x\operatorname{tg}(x^2+1)\,dx$

5. $\int\frac{\operatorname{cotg}(1/x)}{x^2}\,dx$

6. $\int\sec(x+1)\,dx$

7. $\int\operatorname{sen}(\omega t + \theta)\,dt$

8. $\int x\operatorname{cosec} x^2\,dx$

9. $\int \cos x \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)dx$

10. $\int \operatorname{sen}^3(2x+1)dx$

11. $\int \cos^5(3-3x)dx$

12. $\int 2x \operatorname{sen}^4(x^2-1)dx$

13. $\int e^{2x}\cos^2(e^{2x}-1)dx$

14. $\int \operatorname{sen}^3 2\theta \cos^4 2\theta \, d\theta$

15. $\int \operatorname{sen}^3(1-2\theta)\cos^3(1-2\theta)d\theta$

16. $\int \operatorname{sen}^{19}(t-1)\cos(t-1)dt$

17. $\int \frac{1}{\theta}\operatorname{tg}^3(\ln\theta)d\theta$

18. $\int \operatorname{tg}^3 x \cos^4 x \, dx$

19. $\int \cos^4 x \, dx$

20. $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$

21. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}dx$

22. $\int 15 \operatorname{sen}^5 x \, dx$

23. $\int 15 \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$

24. $\int 48 \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$

25. $\int \cos^6 3x \, dx$

26. $\int \frac{-3\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx$

27. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx$

28. $\int \operatorname{tg}^2 5x \, dx$

29. $\int \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen}(\omega t+\theta)\,dt$

30. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx$

31. $\int \sec^4 t \operatorname{cotg}^6 t \operatorname{sen}^8 t \, dt$

32. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{tg}^3\sqrt{x^2-1}\,dx$

33. $\int \sec^3(1-4x)dx$

34. $\int \operatorname{cosec}^4(3-2x)dx$

35. $\int x \operatorname{cotg}^2(x^2-1)\operatorname{cosec}^2(x^2-1)dx$

36. Verificar as fórmulas de recorrência (8), (9) e (10) da Seção 7.2.11.

37. Verificar as fórmulas:

(*a*) $\int \operatorname{tg}^n u \, du = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}u - \int \operatorname{tg}^{n-2}u \, du$

(*b*) $\int \operatorname{cotg}^n u \, du = \frac{-1}{n-1}\operatorname{cotg}^{n-1}u - \int \operatorname{cotg}^{n-2}u \, du$

38. Calcular a área limitada pela curva $y = \cos x$, pelas retas $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ e o eixo dos x.

39. Calcular a área limitada por $y = 2|\operatorname{sen} x|$, $x = 0$, $x = 2\pi$ e o eixo dos x.

40. Calcular a área da região limitada por $y = \operatorname{tg}^3 x$, $y = 1$ e $x = 0$.

41. Calcular a área sob o gráfico de $y = \cos^6 x$, de 0 até π.

42. Calcular a área sob o gráfico de $y = \operatorname{sen}^6 x$, de 0 até π.

43. Calcular a área sob o gráfico de $y = \operatorname{sen}^3 x$, de 0 até π.

44. Calcular a área entre as curvas $y = \operatorname{sen}^2 x$ e $y = \cos^2 x$, de $\frac{\pi}{4}$ até $\frac{3\pi}{4}$.

Nos exercícios 45 a 67, calcular a integral indefinida:

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 5}}$

46. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{9 - 16t^2}}$

47. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 9}}\, dx$

48. $\displaystyle\int (1 - 4t^2)^{3/2}\, dt$

49. $\displaystyle\int x^2\sqrt{4 - x^2}\, dx$

50. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2 + 3}\, dx$

51. $\displaystyle\int \frac{5x + 4}{x^3\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$

52. $\displaystyle\int (x + 1)^2 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

53. $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 16}}\, dt$

54. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}}\, dx$

55. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2 - x^2}}\, dx$

56. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}}\, dx$

57. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}\, dx$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^3}\, dx$

60. $\displaystyle\int \frac{(x + 1)}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$

61. $\displaystyle\int \frac{(6x + 5)}{\sqrt{9x^2 + 1}}\, dx$

62. $\displaystyle\int \frac{(x + 3)}{\sqrt{x^2 + 2x}}\, dx$

63. $\displaystyle\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$

64. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx$

65. $\displaystyle\int \sqrt{4 + x^2}\, dx$

66. $\displaystyle\int (\sqrt{1 + x^2} + 2x)\, dx$

67. $\displaystyle\int \left(\operatorname{sen} x + \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}\right) dx$

Nos exercícios 68 a 72, calcular a integral definida:

68. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 2}}$

69. $\displaystyle\int_0^{a/2b} \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx, 0 < a < b$

70. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t^4\sqrt{4 + t^2}}$

71. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2\sqrt{9t^2 + 16}}$

72. $\displaystyle\int_6^7 \frac{dt}{(t - 1)^2\sqrt{(t - 1)^2 - 9}}$.

Nos exercícios 73 a 76, verificar se a integral imprópria converge. Em caso positivo, determinar seu valor.

73. $\displaystyle\int_3^{10} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

74. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

75. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

76. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

7.5 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

No Capítulo 2, vimos que uma função racional $f(x)$ é definida como o quociente de duas funções polinomiais, ou seja,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios.

As integrais de algumas funções racionais simples, como, por exemplo,

$$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^2+1}, \frac{2x}{x^2+1}, \frac{1}{x^2+6x+13}$$

são imediatas ou podem ser resolvidas por substituição e já foram vistas anteriormente.

Nesta seção, vamos apresentar um procedimento sistemático para calcular a integral de qualquer função racional. A idéia básica é escrever a função racional dada como uma soma de frações mais simples. Para isto, usaremos um resultado importante da Álgebra, que é dado na proposição seguinte.

7.5.1 Proposição Se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais, $p(x)$ pode ser expresso como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos, todos com coeficientes reais.

7.5.2 Exemplos

(i) O polinômio $q(x) = x^2 - 3x + 2$ pode ser escrito como o produto dos fatores lineares $x - 2$ e $x - 1$, ou seja, $q(x) = (x-2)(x-1)$.

(ii) O polinômio $q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ pode ser expresso como o produto do fator linear $x - 1$ pelo fator quadrático irredutível $x^2 + 1$, isto é,

$$q(x) = (x^2+1)(x-1).$$

(iii) $p(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1)^2(x^2+3x+4)$ é uma decomposição do polinômio

$$p(x) = 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 7x + 4.$$

A decomposição da função racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples está subordinada ao modo como o denominador $q(x)$ se decompõe nos fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis. Vamos considerar os vários casos separadamente. As formas das respectivas frações parciais são asseguradas por resultados da Álgebra e não serão demonstradas.

Para o desenvolvimento do método, vamos considerar que o coeficiente do termo de mais alto grau do polinômio do denominador $q(x)$ é 1. Se isso não ocorrer, dividimos o numerador e o denominador da função racional $f(x)$ por esse coeficiente.

Vamos supor, também, que o grau de $p(x)$ é menor que o grau de $q(x)$. Caso isso não ocorra, devemos primeiro efetuar a divisão de $p(x)$ por $q(x)$.

As diversas situações serão exploradas nos exemplos.