Utilizando a fórmula de recorrência do exemplo anterior, vem:

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{u(u^2+9)^{-2}}{2\cdot 9\cdot 2} + \frac{3}{2\cdot 9\cdot 2}\int\frac{du}{(u^2+9)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{u}{36(u^2+9)^2} + \frac{3}{36}\left[\frac{u(u^2+9)^{-1}}{2\cdot 9\cdot 1} + \frac{1}{2\cdot 9\cdot 1}\int\frac{du}{u^2+9}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{u}{36(u^2+9)^2} + \frac{3}{36}\left[\frac{u}{18(u^2+9)} + \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{3}\right]\right\} + C$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2x+2}{36(4x^2+8x+13)^2} + \frac{3}{36}\left[\frac{2x+2}{18(4x^2+8x+13)} + \frac{1}{54}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+2}{3}\right]\right\} + C$$

$$= \frac{x+1}{36(4x^2+8x+13)^2} + \frac{1}{12}\left[\frac{x+1}{18(4x^2+8x+13)} + \frac{1}{108}\operatorname{arctg}\frac{2x+2}{3}\right] + C.$$

7.6 Exercícios

Nos exercícios 1 a 23, calcular a integral indefinida.

1. $\displaystyle\int\frac{2x^3}{x^2+x}\,dx$

2. $\displaystyle\int\frac{2x+1}{2x^2+3x-2}\,dx$

3. $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4}\,dx$

4. $\displaystyle\int\frac{3x^2}{2x^3-x^2-2x+1}\,dx$

5. $\displaystyle\int\frac{x^2+5x+4}{x^2-2x+1}\,dx$

6. $\displaystyle\int\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)^2}\,dx$

7. $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}\,dx$

8. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-4x^2}$

9. $\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2+4}{2x^2+2}\,dx$

10. $\displaystyle\int\frac{5\,dx}{x^3+4x}$

11. $\displaystyle\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$

12. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+8}$

13. $\displaystyle\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$

14. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^2-x+1)^2}$

15. $\displaystyle\int\frac{4x^4}{x^4-x^3-6x^2+4x+8}\,dx$

16. $\displaystyle\int\frac{x^2}{3x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}\,dx$

17. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+9x}$

18. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

19. $\displaystyle\int\frac{x^3+x^2+2x+1}{x^3-1}\,dx$

20. $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{(x^2+2)^2}$

21. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-3x^3+3x^2-x}$

22. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^2}$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

24. Verificar a fórmula $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

25. Calcular a área da região limitada pelas curvas

$$y = \frac{1}{(x-1)(x-4)},\ y = \frac{1}{(1-x)(x-4)},\ x = 2 \text{ e } x = 3.$$

26. Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}$, de $x = -2$ até $x = 2$.

27. Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \dfrac{-1}{x^2(x-5)}$, de $x = 1$ até $x = 4$.

28. Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \dfrac{1}{(x^2+3)^2}$, de $x = -2$ até $x = 2$.

29. Investigar as integrais impróprias:

(*a*) $\displaystyle I = \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\,(x-5)}$

(*b*) $\displaystyle I = \int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2\,(x-5)}$

(*c*) $\displaystyle I = \int_{5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\,(x-5)}$

30. Determinar, se possível, a área da região sob o gráfico da função $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$, de $-\infty$ a $+\infty$.

7.7 Integração de Funções Racionais de Seno e Cosseno

Quando temos uma integral da forma

$$\int R(\cos x, \text{sen}\ x)\,dx,$$

isto é, o integrando é uma função racional de sen x e cos x, a integral dada pode ser reduzida a uma integral de uma função racional de uma nova variável t. Para isso, fazemos a substituição:

$$t = \text{tg}\,\frac{x}{2},\ -\pi < x < \pi. \tag{1}$$

Para exprimir a função integrando em termos da nova variável t, precisamos encontrar cos x sen x e dx em função de t. Temos:

$$\text{sen}\ x = \frac{2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \text{sen}^2\frac{x}{2}}$$