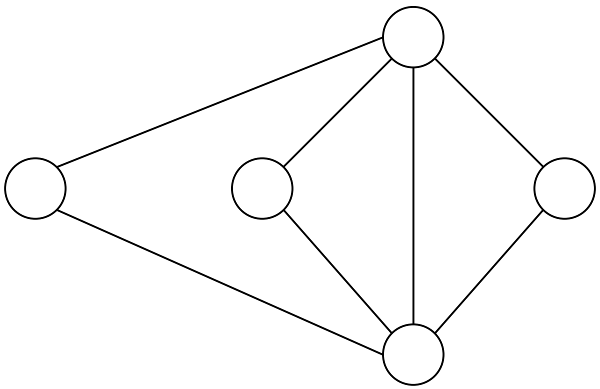
A12 Coloração

CSI466 Teoria dos Grafos

Prof. Dr. George H. G. Fonseca
Universidade Federal de Ouro Preto

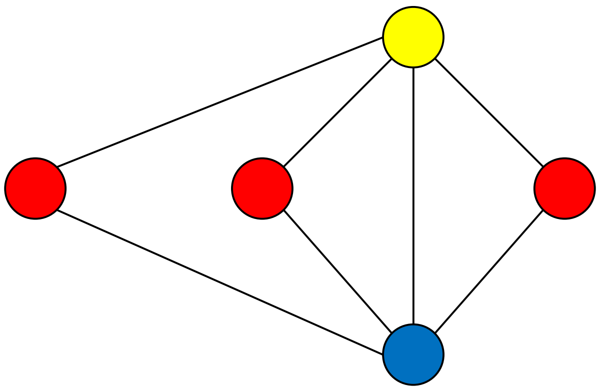
Coloração de Vértices

- Dado um grafo G, como colorir seus vértices de modo que vértices adjacentes possuam cores diferentes? Qual é o menor número de cores necessárias?



Coloração de Vértices

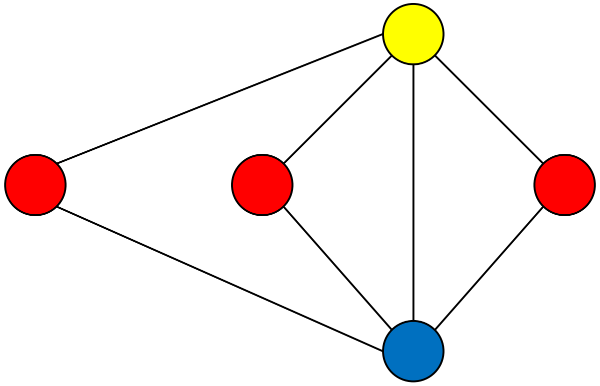
- Dado um grafo G, como colorir seus vértices de modo que vértices adjacentes possuam cores diferentes? Qual é o menor número de cores necessárias?



Coloração de Vértices

- Se existe uma coloração para um grafo G que utiliza k cores, então G é um grafo **k-colorido**

- O **número cromático** de um grafo G, denotado por X(G), é o menor número k para o qual G é k-colorido



X(G) = 3

Coloração de Vértices

- O que podemos dizer sobre o número cromático dos seguintes grafos?
  - Grafo que consiste de um único vértice
  - Grafo com pelo menos uma aresta
  - Grafo completo K_n
  - Grafo bipartido
  - Árvore com 2 ou mais vértices

- Todo grafo 2-cromático é bipartido?

- Todo grafo 2-cromático é uma árvore?

Coloração de Vértices

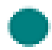
- O que podemos dizer sobre o número cromático dos seguintes grafos?
  - Grafo que consiste de um único vértice
  - Grafo com pelo menos uma aresta
  - Grafo completo K_n
  - Grafo bipartido
  - Árvore com 2 ou mais vértices

  - $X(G) = 1$
  - $X(G) \geqslant 2$
  - $X(G) = n$
  - $X(G) = 2$
  - $X(G) = 2$

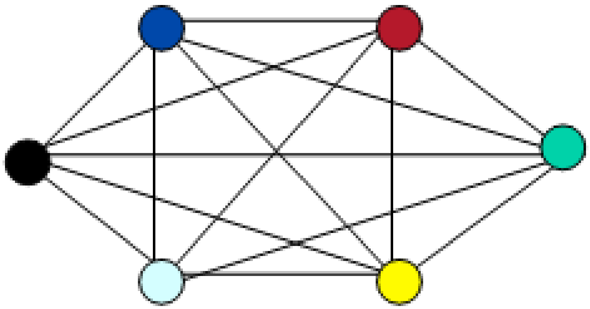
- Todo grafo 2-cromático é bipartido?
- Sim

- Todo grafo 2-cromático é uma árvore?
- Não

Coloração de Vértices

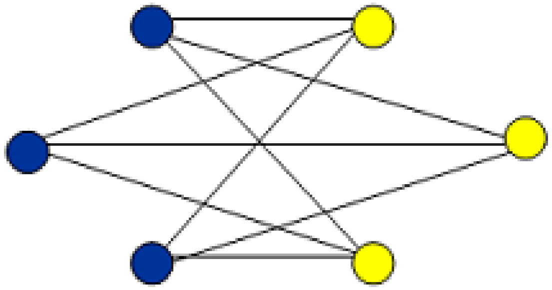


X(*G*) = 1

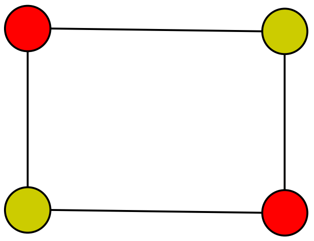


K_6

X(K_6) = 6



X(*G*) = 2



X(G) = 2

Não é árvore!

Coloração de Vértices

- Encontrar o número cromático de um grafo é um problema difícil - NP

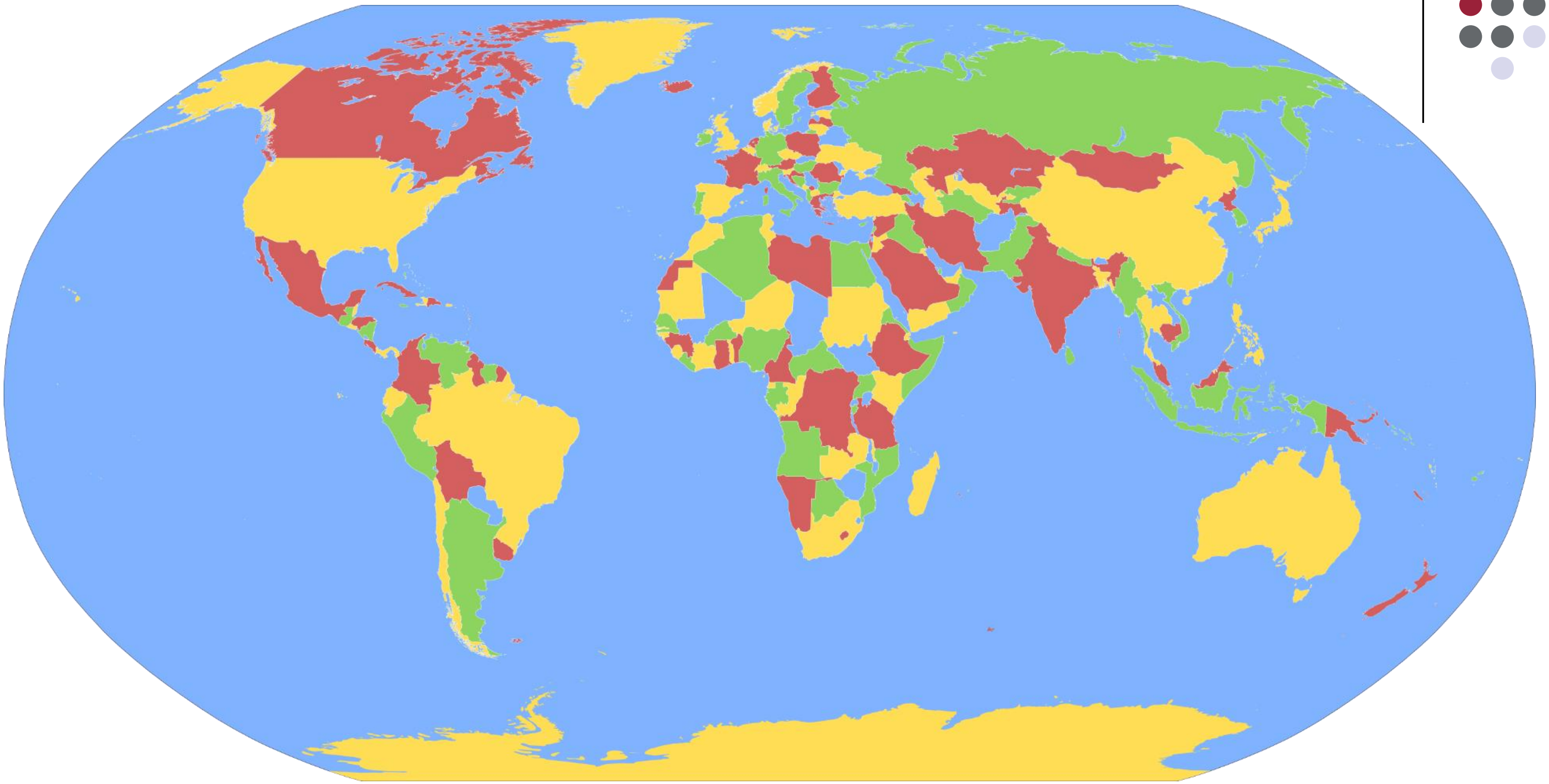
- Já encontrar uma colocação qualquer é trivial
  - Atribuir cores distintas a vértices distintos sempre gera uma coloração correta, então podemos dizer que $1 \leq X(G) \leq V$

Coloração de Vértices

- Quantas cores são necessárias para colorir um grafo planar?

- Teorema das 4 cores: Todo grafo planar pode ser colorido com 4 cores (provado em 1976)

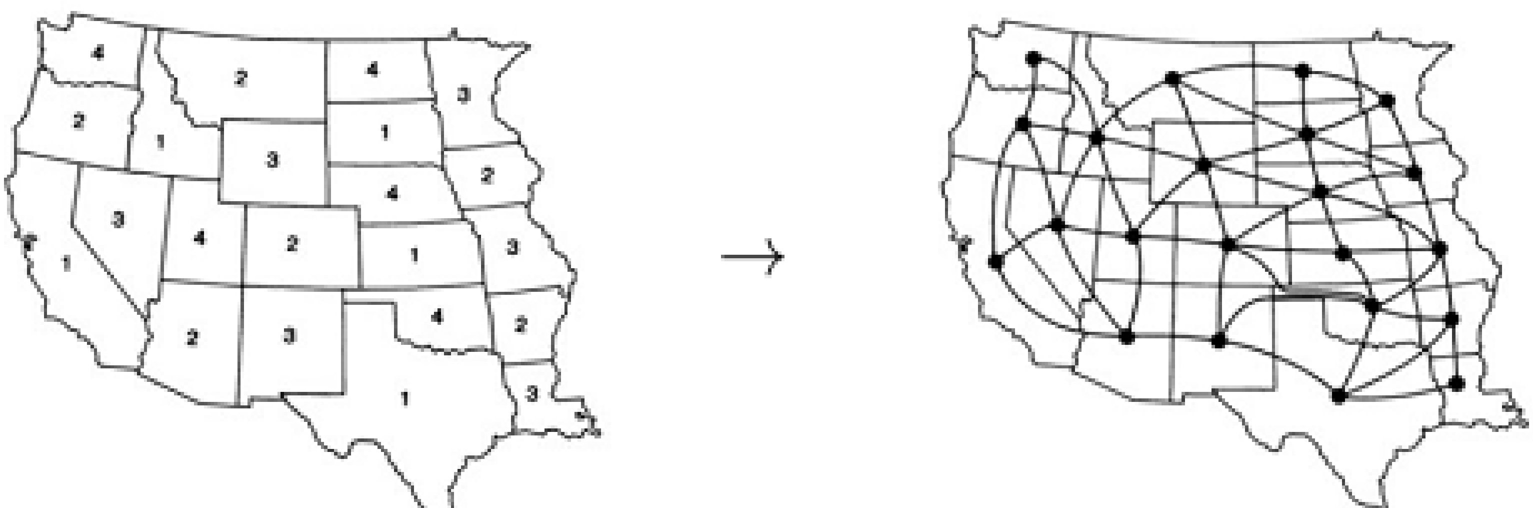
Coloração de Vértices



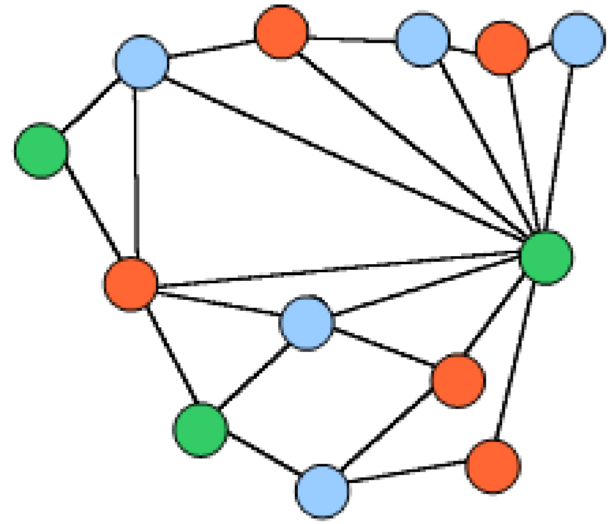
- Conceptualização simples porém de demonstração extremamente complexa

Coloração de Vértices

- Teorema surgiu historicamente com o problema da colocação de mapas
  - Cada região do mapa é representada por um vértice
  - As arestas ligam os vértices que representam regiões com fronteira entre si – todo mapa pode ser visto como um grafo planar

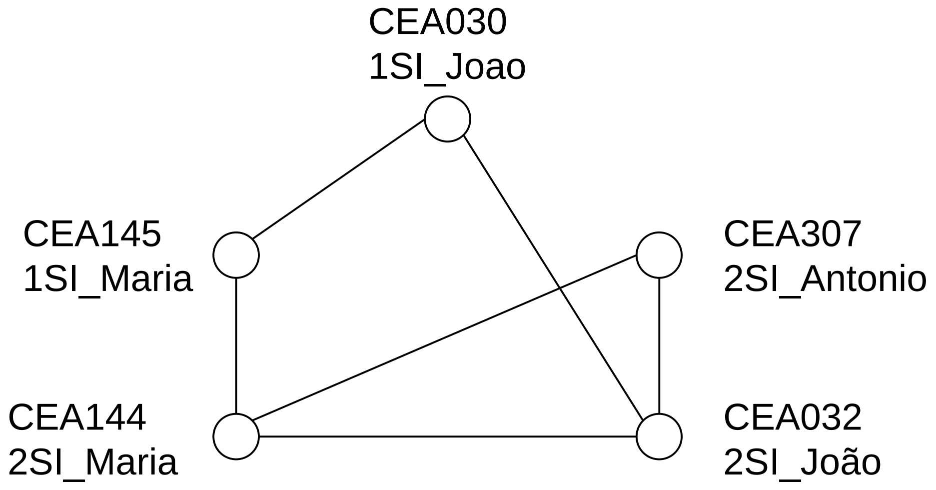


Coloração de Vértices



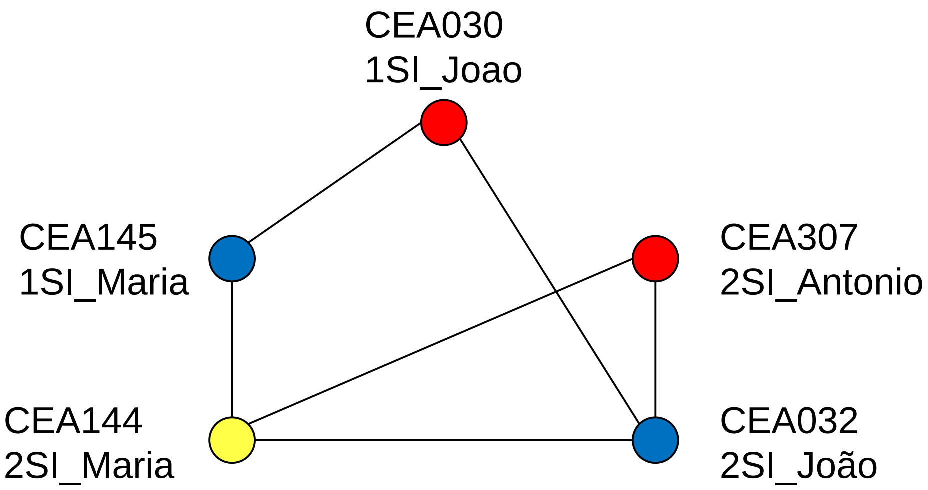
Coloração de Vértices

- Aplicação: alocação de horários
  - Cada disciplina representa um vértice
  - Se duas disciplinas são lecionadas pelo mesmo professor ou têm alunos matriculados em comum, as mesmas são ligadas por aresta



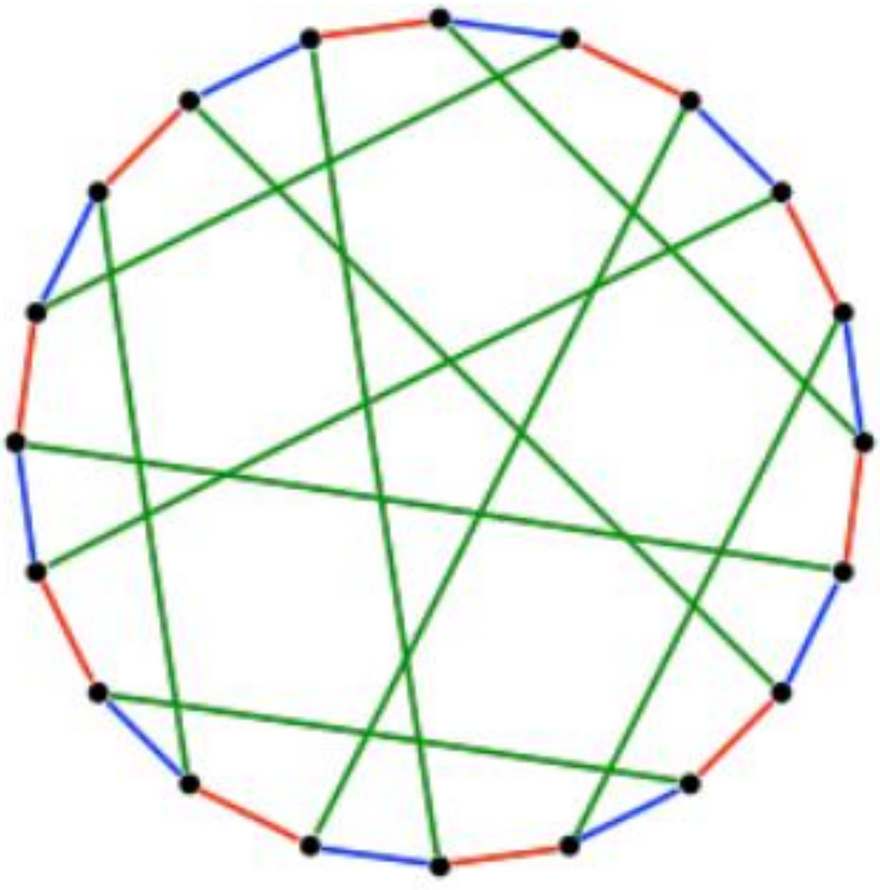
Coloração de Vértices

- Cada cor utilizada na coloração representará um horário distinto



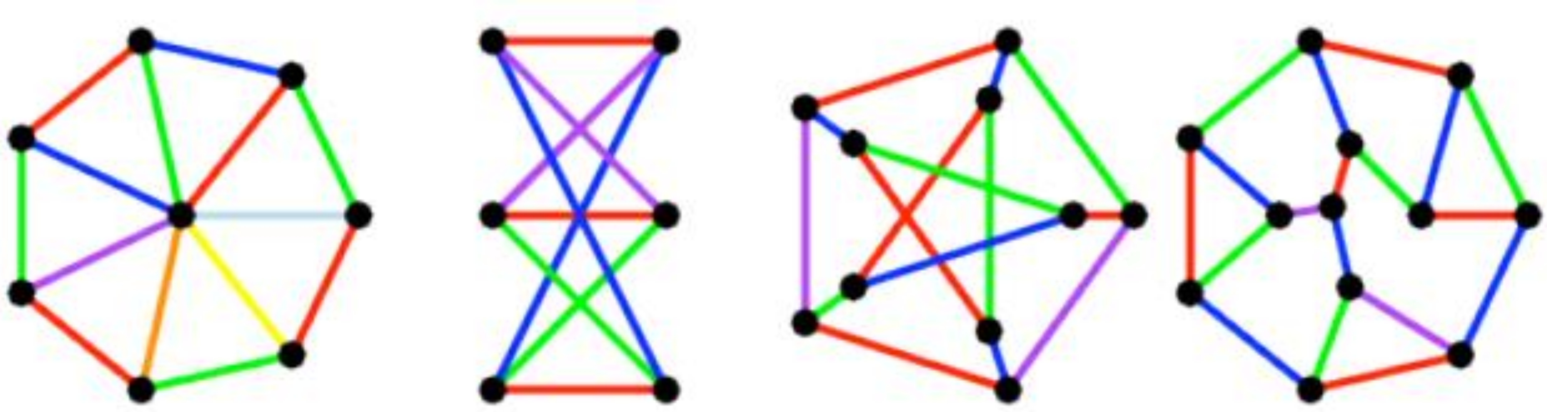
Coloração de Arestas

- Atribuição de cores às arestas de um grafo de maneira que cores diferentes são atribuídas a arestas adjacentes



Coloração de Arestas

- Mais exemplos



Coloração de Arestas

- Se existe uma coloração de arestas para um grafo G que utiliza k cores, então, G é um grafo **k-colorido** de arestas

- O **índice cromático** de um grafo G, denotado por X'(G) é o menor número k para qual G é k-colorido de arestas

- Teorema de Vizing: Para grafos simples, considerando que *dmax* represente o grau máximo de G

$$dmax \leqslant X'(G) \leqslant dmax + 1$$

Coloração de Arestas

- Exemplo de aplicação:
  - Campeonatos esportivos
  - Cada equipe deve enfrentar todas as outras uma vez
  - Cada equipe joga exatamente uma vez por rodada

  - Como programar a tabela do campeonato?

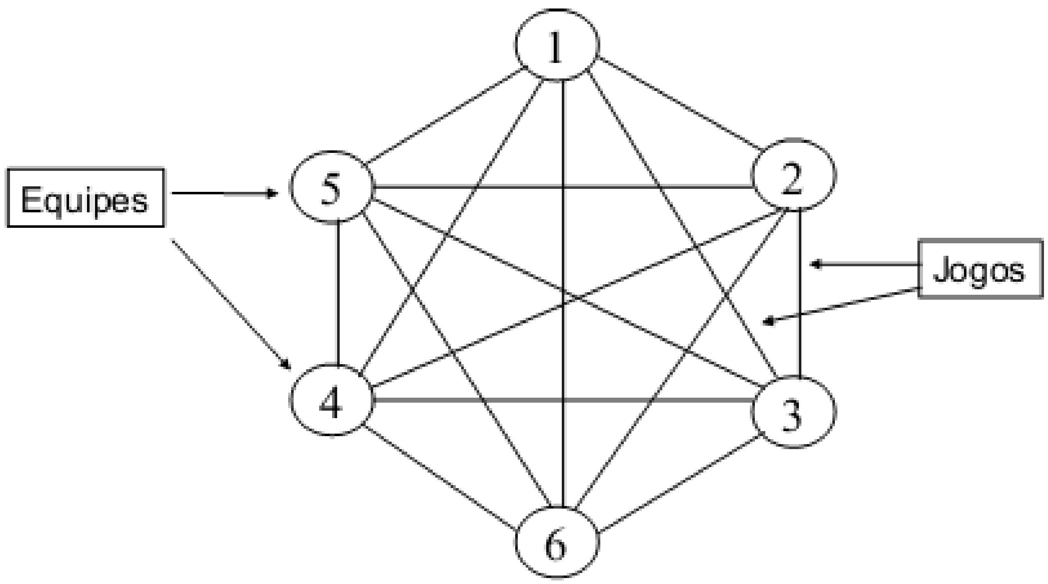
Coloração de Arestas

- Exemplo de aplicação:
  - Cada equipe representa um vértice
  - Cada jogo é representado por uma aresta
  - O grafo tem uma aresta unindo cada par de vértices (grafo completo)

  - Usando o menor número de cores possível, colorir as arestas do grafo

Coloração de Arestas

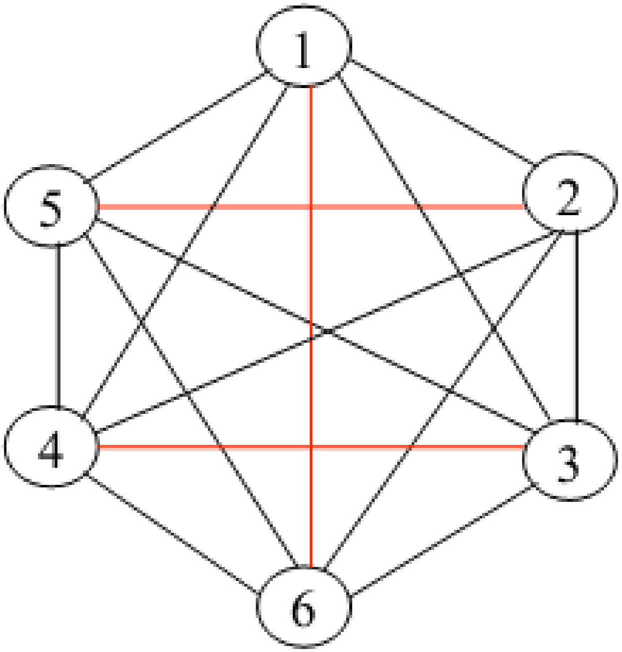
- Exemplo de aplicação:



Coloração de Arestas

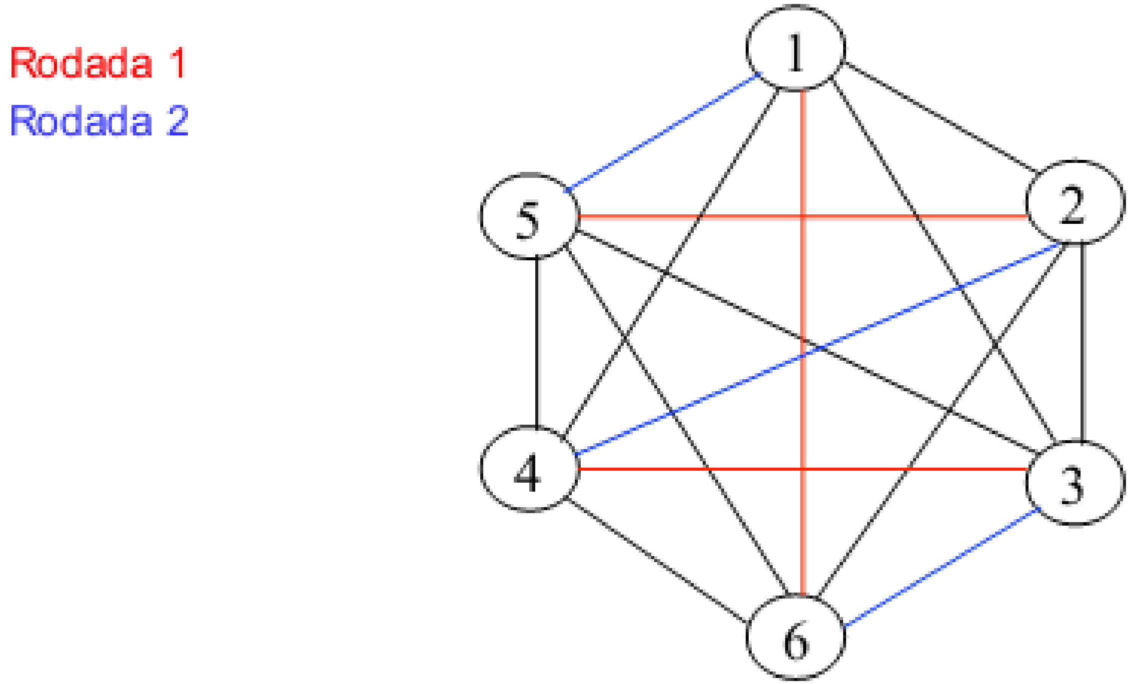
- Exemplo de aplicação:

Rodada 1



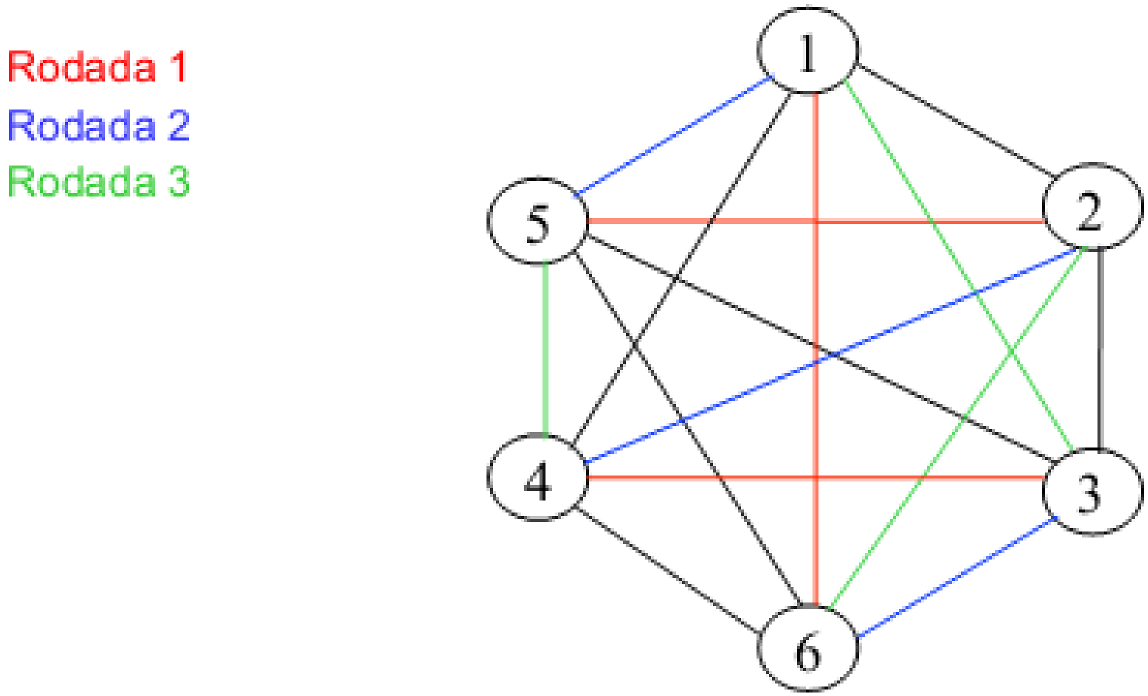
Coloração de Arestas

- Exemplo de aplicação:



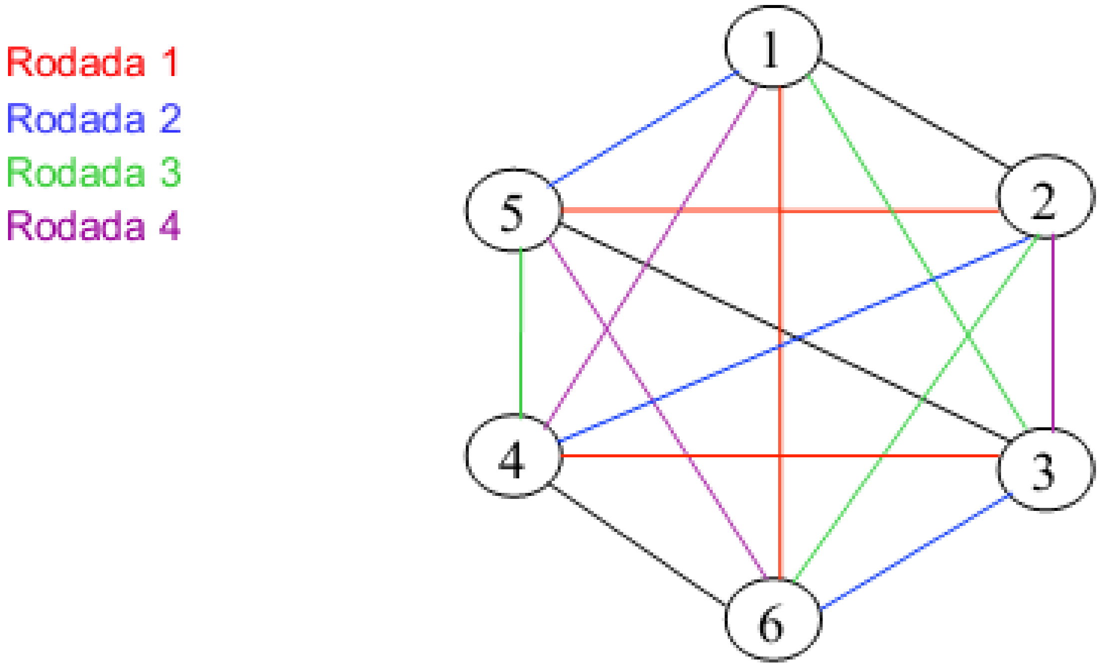
Coloração de Arestas

- Exemplo de aplicação:



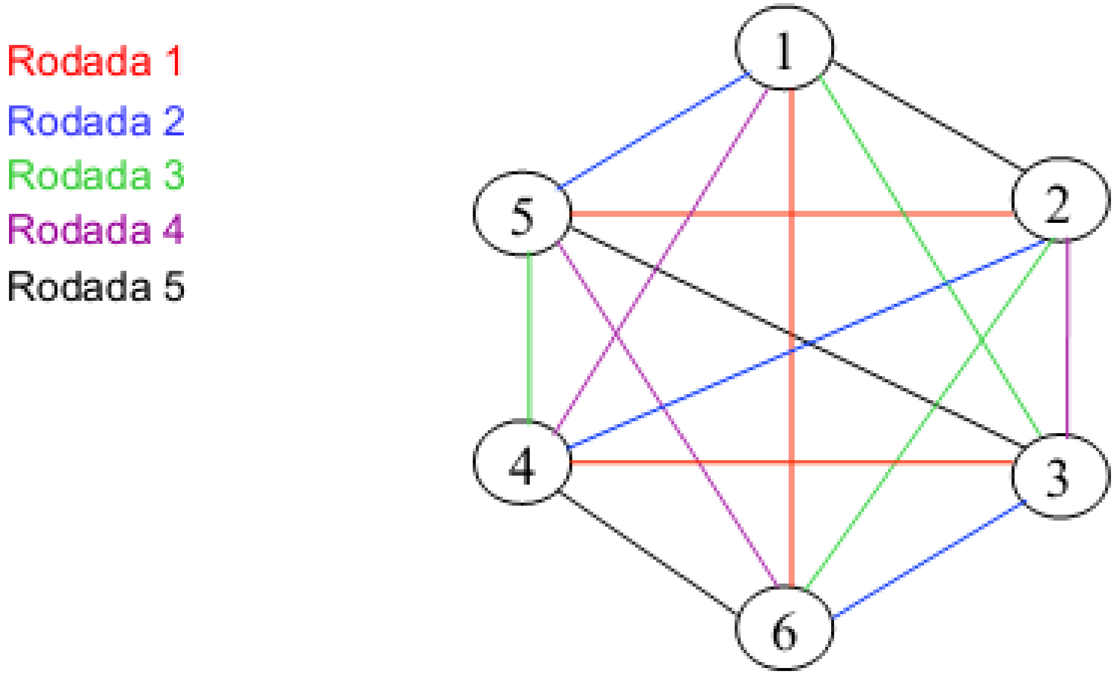
Coloração de Arestas

- Exemplo de aplicação:



Coloração de Arestas

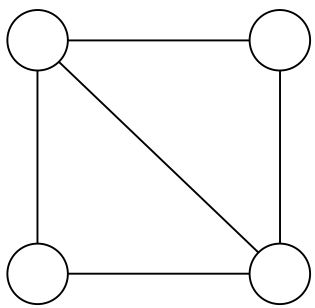
- Exemplo de aplicação:



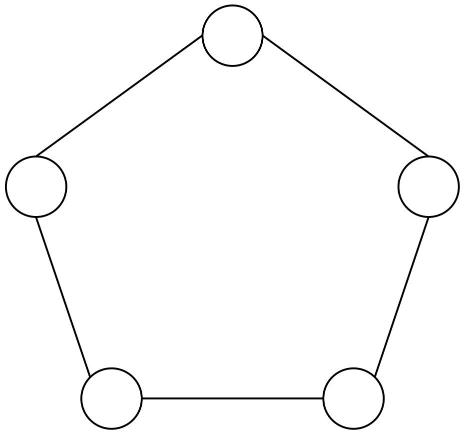
Conseguimos uma tabela!

Definições Adicionais

- Grafo perfeito
  - Seu número cromático é igual à cardinalidade de seu maior clique (i.e. sub-grafo completo)



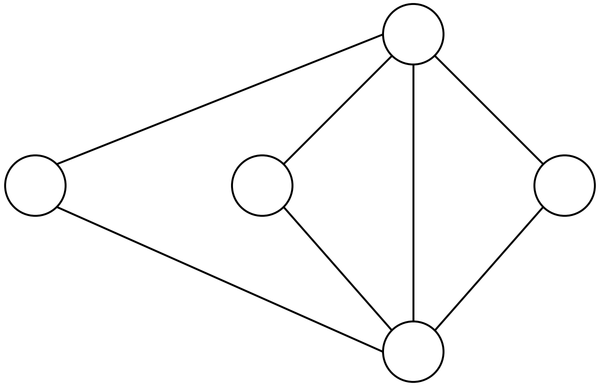
Perfeito



Não perfeito

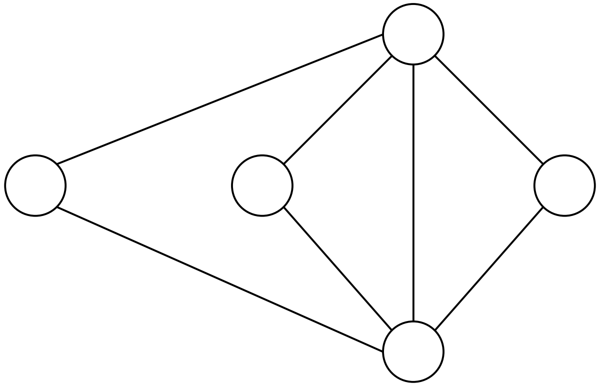
Definições Adicionais

- Grau de saturação
  - Número de cores distintas que estão associadas a um vértice v

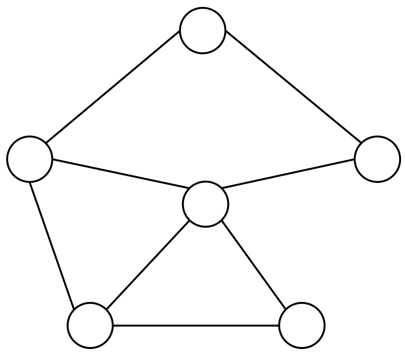


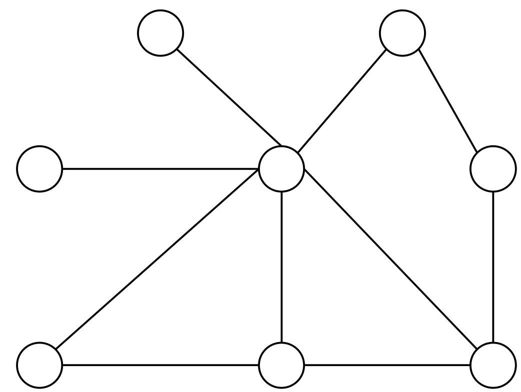
Definições Adicionais

- Grafo crítico
  - A remoção de qualquer vértice ou qualquer aresta acarreta o decréscimo de seu número cromático
  - Todo grafo completo é crítico?



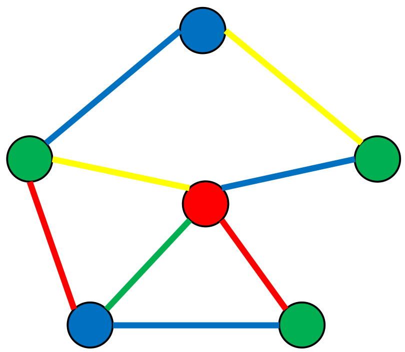
- Apresente o número e o índice cromático de G para os grafos abaixo:



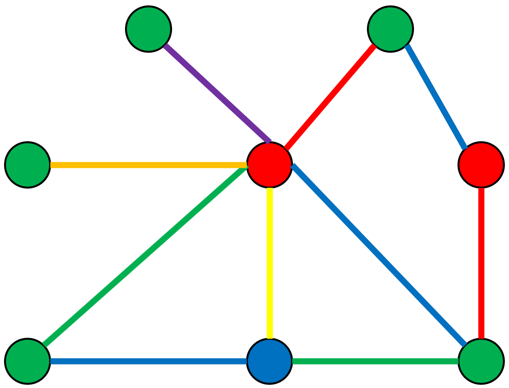


- Qual o índice cromático de um grafo arbritário $K_{n,m}$?
- Qual o número cromático de grafos que representam árvores?

- Apresente o número e o índice cromático de G para os grafos abaixo:



X(G) = 3
X'(G) = 4



X(G) = 3
X'(G) = 6

- Qual o índice cromático de um grafo arbitrário $K_{n,m}$? X'(G) = m
- Qual o número cromático de grafos que representam árvores? X(G) = 2

Revisão

- Coloração de vértices
  - Atribuir uma cor a cada vértice de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor
  - Número cromático (X(G)) – menor número de cores com que é possível colorir o grafo

- Coloração de arestas
  - Atribuir uma cor a cada aresta de modo que arestas adjacentes não tenham a mesma cor
  - índice cromático (X'(G)) – menor número de cores com que é possível colorir as arestas do grafo

Apêndice

Heurística Construtiva p/ Colocação de Vértices

```
GREEDYCOL( G(V, E)) : S
    S ← [1, ..., |V|] //lista que indica a cor atribuída a cada vértice
    CORES ← [1, ..., |V|] //cores disponíveis para atribuição
    para cada vértice u ∈ V
        CORESPOSSIVEIS ← CORES
        para cada cor i ∈ CORES
            para cada vértice v adjacente a u
                se S[v] = i e i ∈ CORESPOSSIVEIS //Cor não é possível (atribuída ao adjacente)
                    CORESPOSSIVEIS ← CORESPOSSIVEIS – {i} //Retirar i de CORESPOSSIVEIS
                fim-se
            fim-para
        fim-para
        S[u] ← CORESPOSSIVEIS[0] //Atribuir ao vértice u a menor cor possível
    fim-para
    retorne S
FIM
```

RECOL(S, G(V, E)) : S

```
1.  CORES ← lista contendo as cores utilizadas em S   //Criar função p/ comput. as cores usadas
2.  iter ← 0
3.  enquanto iter < 10000000   //Tentar por 10000000 vezes
4.      ++iter
5.      u ← vértice aleatório de V
6.      c ← cor aleatória de CORES, exceto a última   //O objetivo é deixar de precisar da últ. cor
7.      S' ← S
8.      atribua a cor c ao vértice u em S'
9.      se a atribuição for válida   //I.e. Nenhum dos adjacentes de u tem a cor c
10.         CORES' ← lista contendo as cores utilizadas em S'   //Usar mesma função da criada p/ linha 1
11.         se |CORES'| ≤ |CORES|   //Se o núm. De cores da solução candidata s' for menor ou igual
12.             S ← S'   //Solução candidata s' passa a ser a melhor solução corrente s
13.             CORES ← CORES'
14.         fim-se
15.     fim-se
16. fim-enquanto
17. retorne S
```

Heurística de Refinamento p/ Colocação de Vértices

Bibliografia

- Goldbarg, M.; Goldbarg, E. **Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações**. 1ª edição. Elsevier, 2012.

- Boaventura Netto, P. O. **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**. 4a edição. Edgar Blucher, 2012.