

A13 Subconjuntos de Vértices

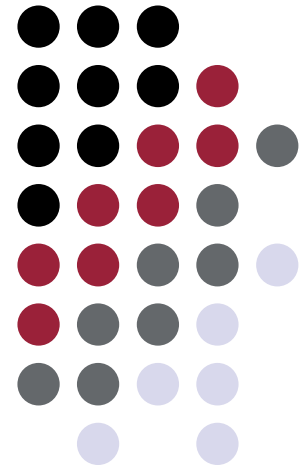


UFOP

Universidade Federal
de Ouro Preto

CSI466 Teoria de Grafos

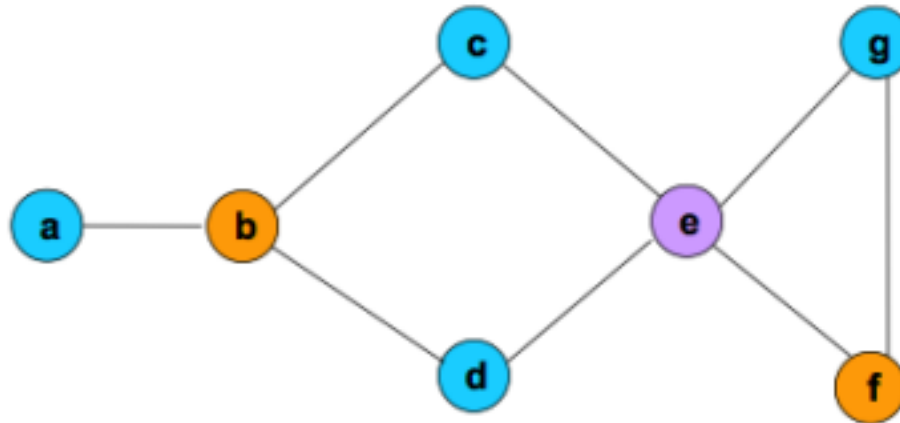
Prof. Dr. George H. G. Fonseca
Universidade Federal de Ouro Preto



Conjuntos Independentes



- Seja um grafo $G = (V ; E)$, um conjunto independente de vértices I de G é um subconjunto de V tal que não existe nenhuma aresta entre qualquer par de elementos de I

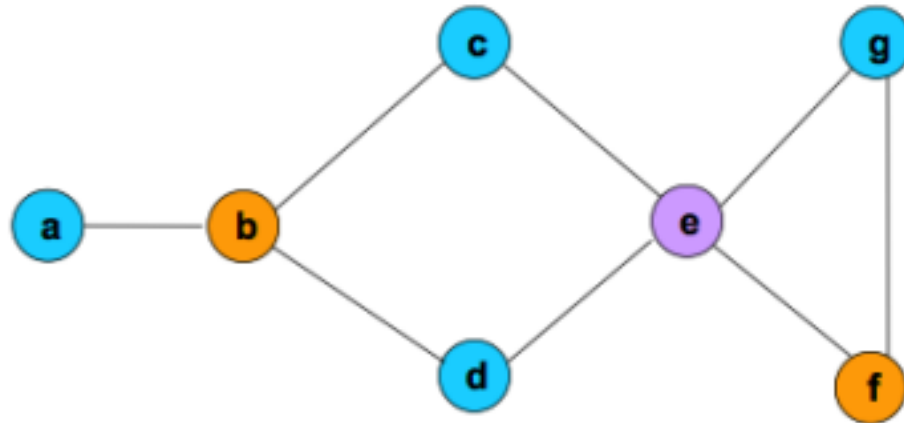


- Exemplos: $\{a, c, d, g\}$, $\{b, f\}$, $\{e\}$

Conjunto Independente Maximal



- Um conjunto independente maximal é um conjunto independente no qual não se pode adicionar mais nenhum vértice sem destruir a propriedade de independência.
 - I é maximal se não existe um I' tal que $I' \supset I$

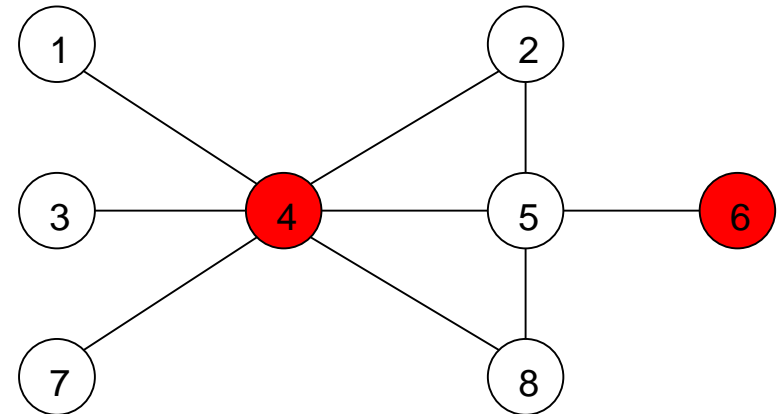
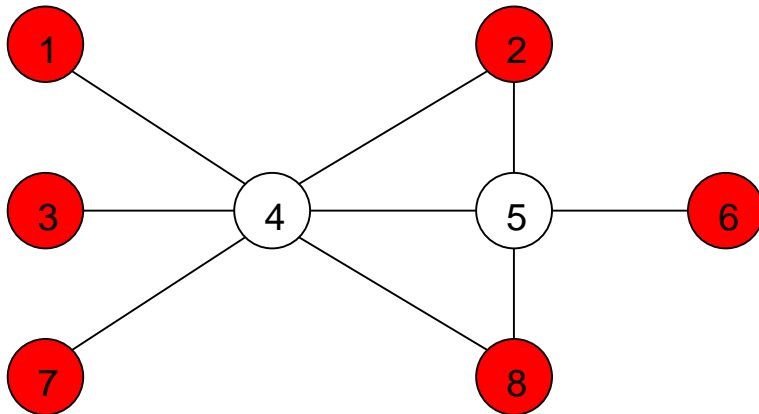


- $\{a, c, d, g\}$ e $\{b, f\}$ são conjuntos independentes maximais
- $\{e\}$ não é um conjunto independente maximal

Conjunto Independente Máximo



- Existem vários conjuntos independentes maximais em um grafo que podem ter diferentes tamanhos.
 - Qual é o de maior tamanho?
 - Conjunto independente I é máximo se não existe um I' tal que tal que $|I'| > |I|$



- $\{1,2,3,6,7,8\}$ é um conjunto independente máximo
- $\{4,6\}$ é conjunto independente maximal que não é máximo

Conjunto Independente Máximo



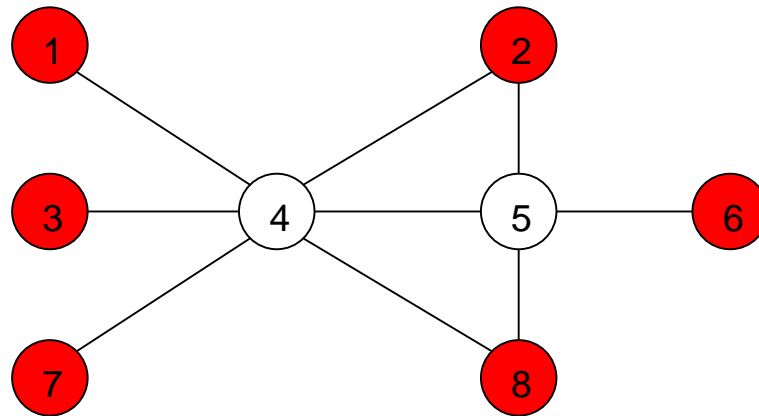
- Exemplo de aplicação

- Suponha que um grafo $G = (V, E)$ represente a incompatibilidade de horários entre exames que devem ser aplicados no final do ano letivo
- Os vértices $x, y \in V$ estarão ligados se representarem exames que têm alunos em comum.
- Qual o maior número de exames que podem ser aplicados ao mesmo tempo?
- Solução: a resposta para o problema é dada por um subconjunto independente máximo de vértices do grafo G .

Número de Independência



- O número de independência, denotado por $\alpha(G)$, é a cardinalidade do conjunto independente máximo do grafo G



- $\alpha(G) = 6$
- Como encontrar o número de independência?
- Esse é um problema para o qual ainda não há um algoritmo eficiente capaz de resolvê-lo (NP-Completo)

Algoritmo Aproximado

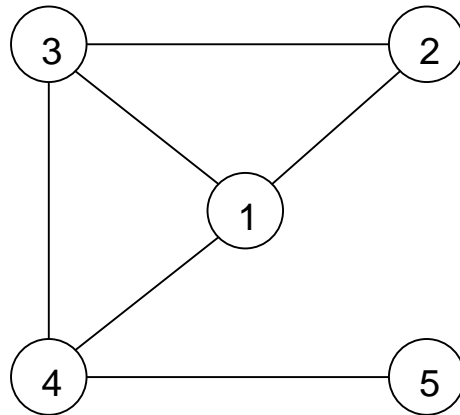


- Comece com um vértice qualquer.
- Selecione os próximos vértices sempre testando se o conjunto ao qual eles estão sendo inseridos continua independente
- Atenção: encontra-se um conjunto independente maximal, e não necessariamente máximo

Essa aproximação pode ser mais eficiente se priorizar vértices de menor grau!



- Um clique em um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto $C \subseteq V$ tal que, para todo par de vértices $u, v \in C$, existe uma aresta $(u, v) \in E$.



- Exemplos: $\{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{1\}$.

Clique Maximal e Máximo



- Um clique maximal é um clique que não está propriamente contido em nenhum outro clique.
 - C é maximal se não existe um C' tal que $C' \supset C$
- Um clique máximo é um clique que inclui o maior número possível de vértices em um grafo.
 - C é máximo se não existe um C' tal que $|C'| > |C|$
- O número de clique de um grafo G , denotado por $\omega(G)$, é a cardinalidade do clique máximo de G

Clique Maximal e Máximo

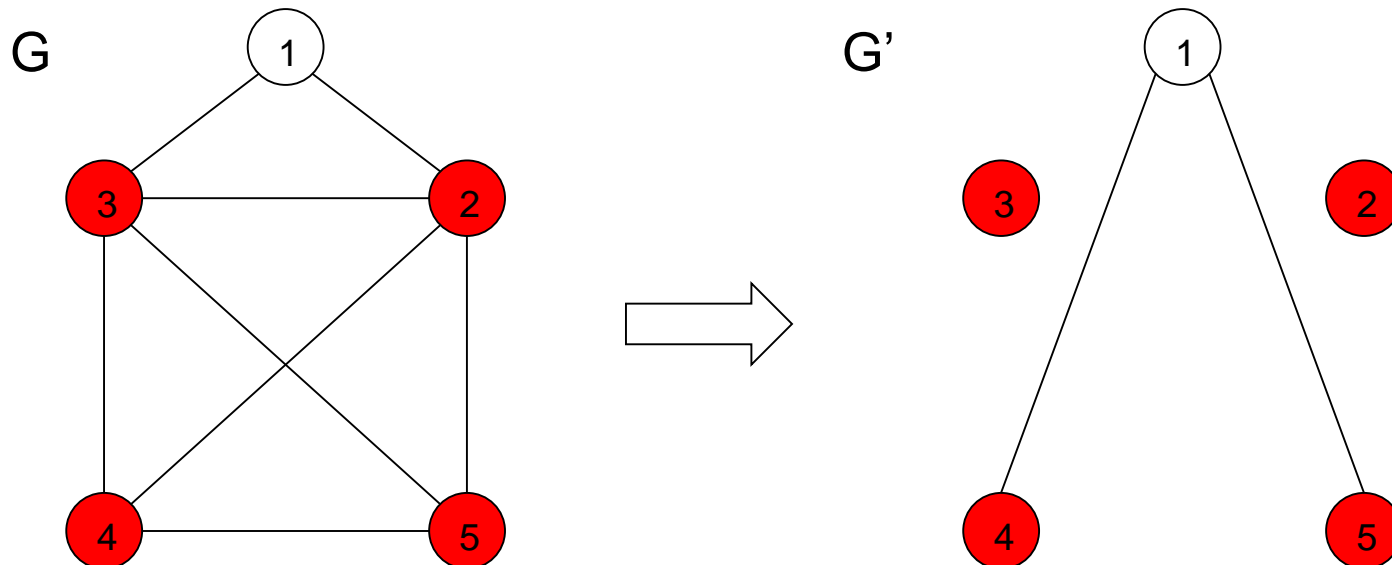


- Exemplo de aplicação
 - Considere uma rede social, onde os vértices do grafo representam pessoas, e as arestas representam o conhecimento mútuo.
 - Deseja-se encontrar um maior subconjunto de pessoas, em que todas conhecem umas as outras.
 - A solução para o problema é um clique máximo no grafo.

Clique e Conjunto Independente



- O problema do clique e o problema do conjunto independente são complementares: um clique em G é um conjunto independente no grafo complementar de G e vice versa



Clique e Conjunto Independente



- O tamanho do maior clique e o tamanho do maior conjunto independente num grafo G são difíceis de serem calculados computacionalmente
 - Eles pertencem a classe dos problemas NP-completos.
- Não existe nenhum algoritmo em tempo polinomial que resolva estes problemas.
- É possível, entretanto, verificar em tempo polinomial se determinado conjunto de vértices é um conjunto independente ou um clique.

Cliques e Conjuntos Independentes

Exercícios



- Proponha um algoritmo que garanta um clique maximal em um grafo.
- Apresente um caso em que o algoritmo proposto encontra um clique maximal que não é máximo.



- Conjunto independente
 - Conjunto de vértices que não são interligados
 - Máximo – conjunto de maior cardinalidade possível

- Clique
 - Conjunto de vértices que são interligados (todos a todos)
 - Máximo – conjunto de maior cardinalidade possível

Maximal: não é possível adicionar vértices



- Goldberg, M.; Goldberg, E. **Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações**. 1ª edição. Elsevier, 2012.
- Boaventura Netto, P. O. **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**. 4a edição. Edgar Blucher, 2012.

