A14 Emparelhamentos

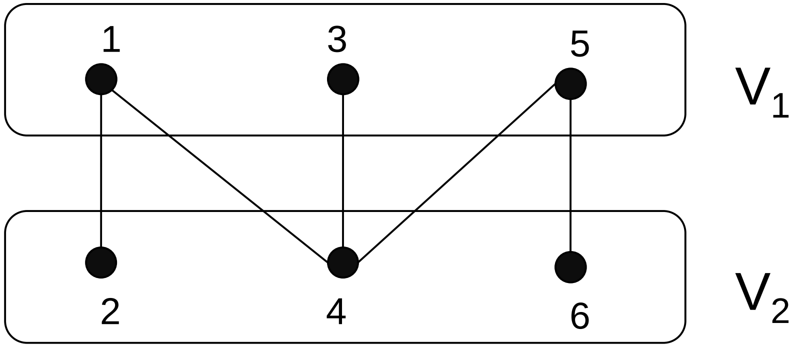
CSI466 Teoria dos Grafos

Prof. Dr. George H. G. Fonseca
Universidade Federal de Ouro Preto

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

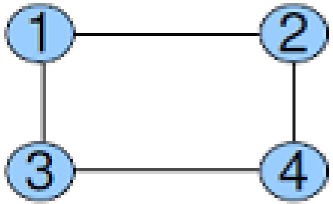
Grafos Bipartidos

- Um grafo é dito ser bipartido quando seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 tais que toda aresta de G une um vértice de V_1 a um vértice de V_2

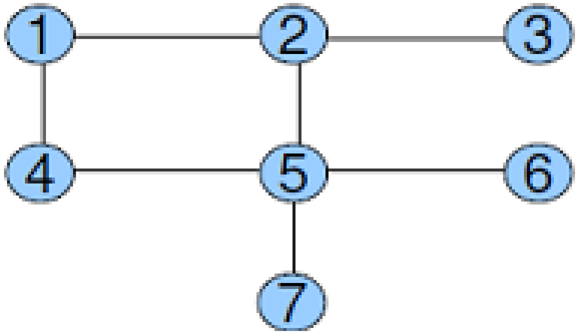


- Determinar V1 e V2 para os seguintes grafos

1



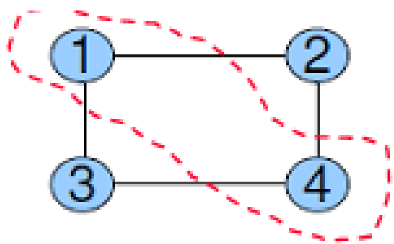
2



Grafos Bipartidos
Solução dos Exercícios

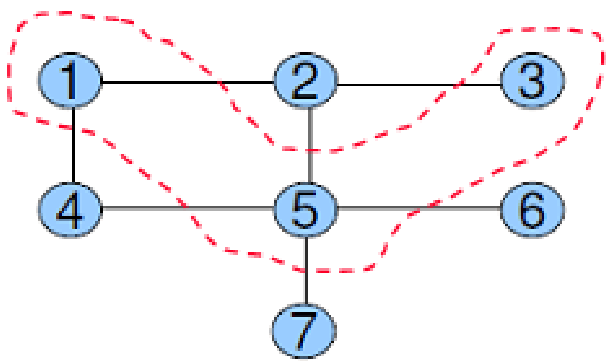
- Determinar V1 e V2 para os seguintes grafos

1



V1 = {1, 4}
V2 = {2, 3}

2



V1 = {1, 3, 5}
V2 = {2, 4, 6, 7}

Grafos Bipartidos

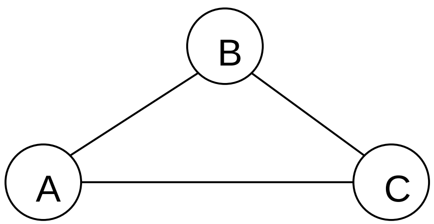
- Todo grafo é bipartido?

Grafos Bipartidos

- Todo grafo é bipartido?

- Não! Um grafo é bipartido se e somente se não possuir ciclos de comprimento impar

- Contra-exemplo:



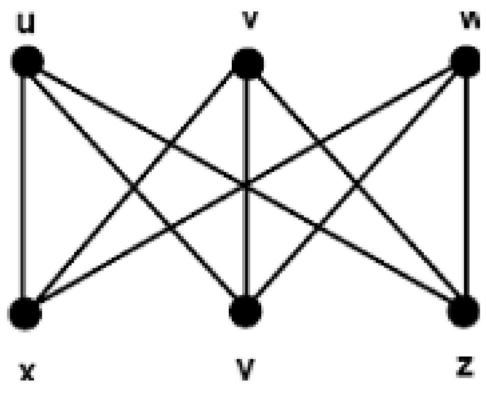
Grafo Bipartido Completo

- Um grafo bipartido completo é aquele em que cada um dos elementos de V1é adjacente a cada um dos elementos de V2

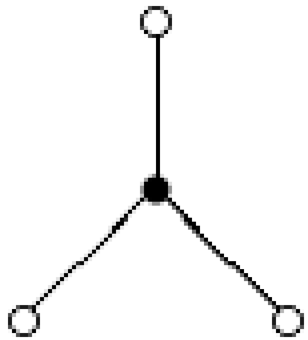
- Se $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$, então denota-se um grafo bipartido completo por $K_{m,n}$

- Os conjuntos de bipartição V_1e V_2 devem garantir que cada aresta conecta um vértice do conjunto V_1 e um vértice do conjunto V_2

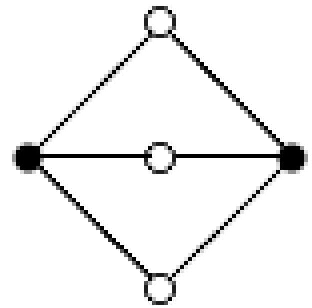
- Exmeplo:
  O grafo ao lado é $K_{3,3}$
  $V_1 = \{u, v, w\}$ e $V_2 = \{x, y, z\}$



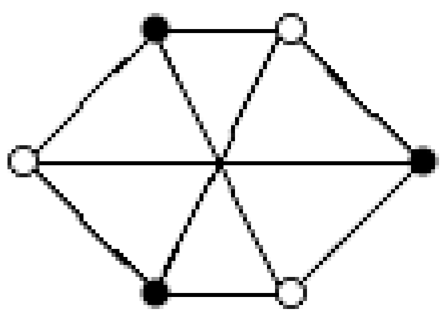
Grafo Bipartido Completo



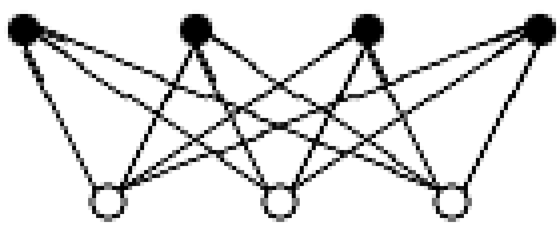
$K_{1,3}$



$K_{2,3}$



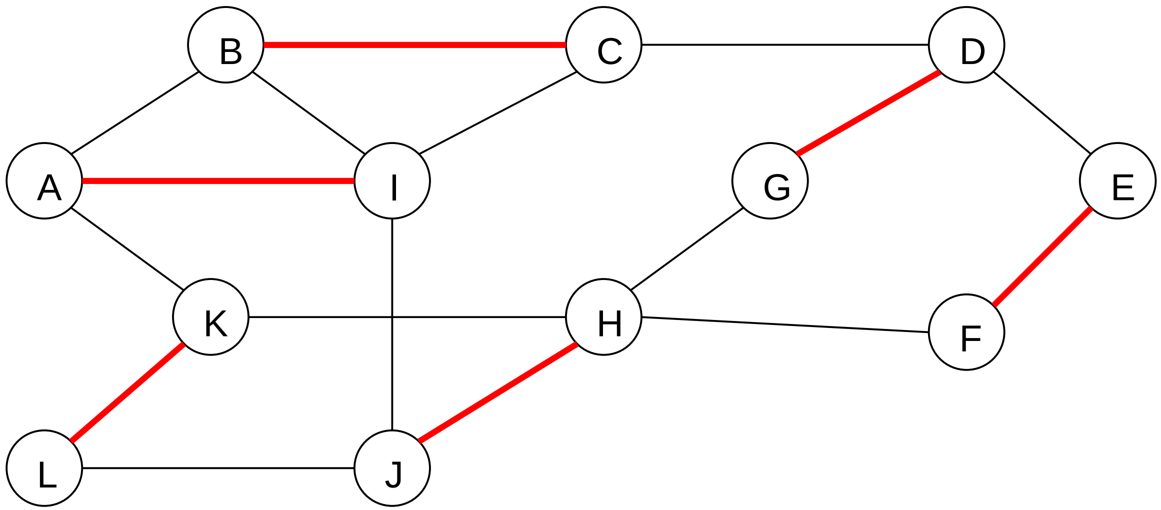
$K_{3,3}$



$K_{4,3}$

Emparelhamento

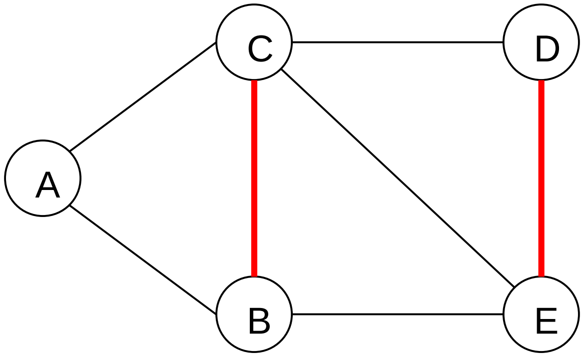
- Um emparelhamento (*matching*) de um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto $M \subseteq E$ tal que nenhum par de arestas de M incide no mesmo vértice



- Um vértice não é incidente a mais de uma aresta do emparelhamento

Emparelhamento

- Um vértice incidente numa aresta do emparelhamento diz-se **coberto** pelo emparelhamento



  - Vértices cobertos: B, C, D, E
  - Vértice não coberto: A

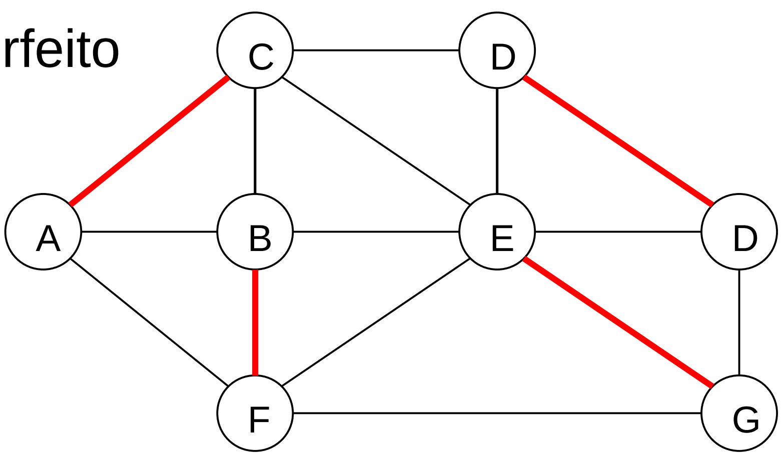
Emparelhamento

- Um emparelhamento M é **perfeito** se cobre todos os vértices do grafo G.

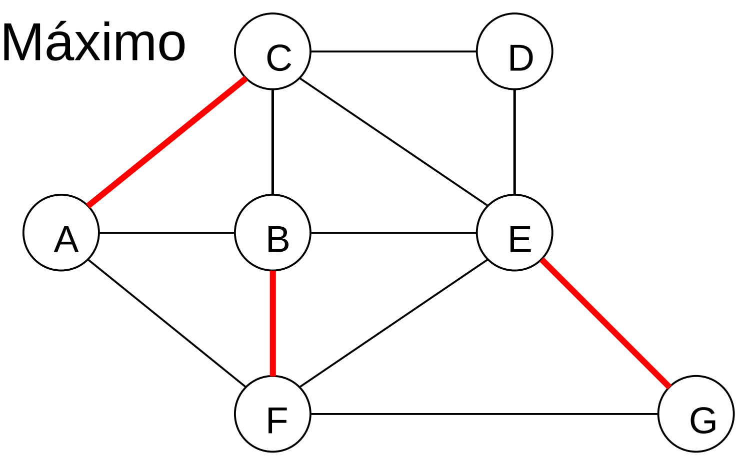
- Um emparelhamento **maximal** é um emparelhamento no qual nenhuma aresta a mais pode ser adicionada sem ferir a propriedade de emparelhamento.

- Um emparelhamento é **máximo** se não existe nenhum outro de cardinalidade maior

Perfeito



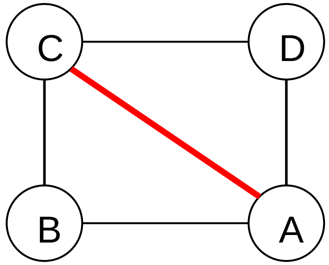
Máximo



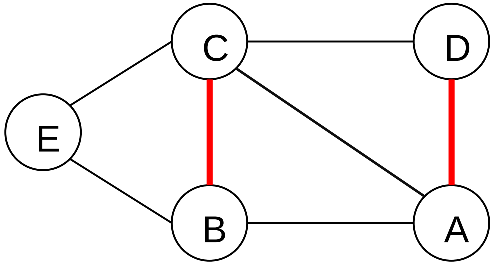
Emparelhamento

- Mais exemplos

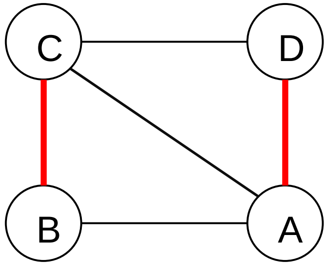
Maximal



Máximo



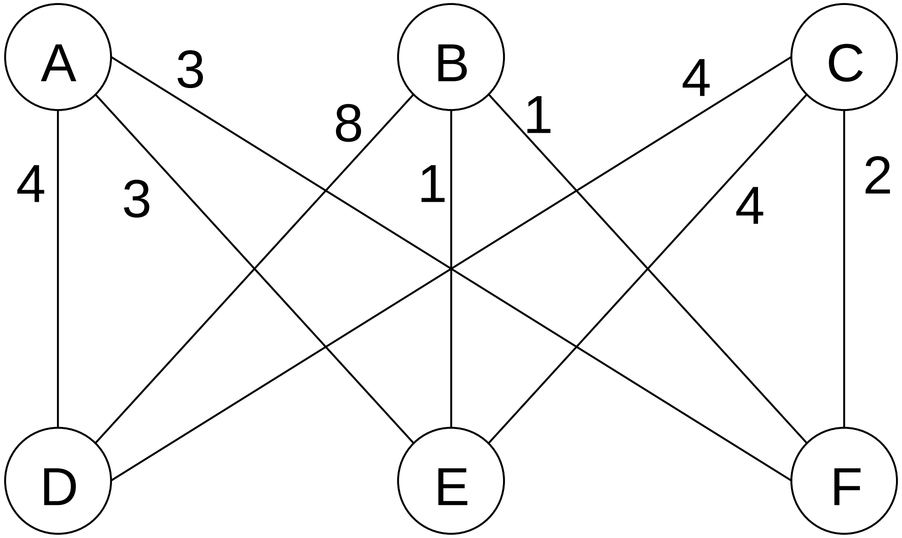
Perfeito



Obs. Alguns grafos não admitem emparelhamento perfeito

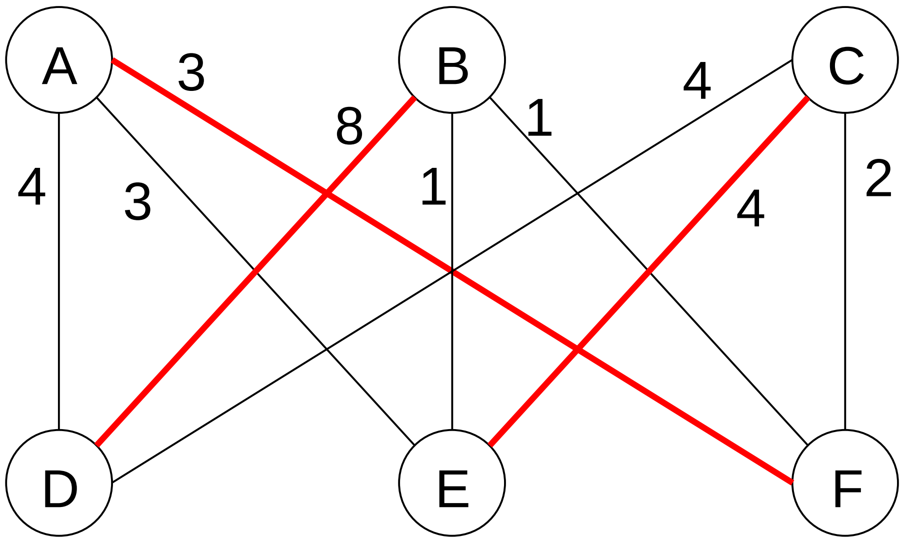
Emparelhamento

- Em um grafo ponderado, um **emparelhamento de peso máximo** é um emparelhamento cuja soma dos pesos das arestas é o maior possível



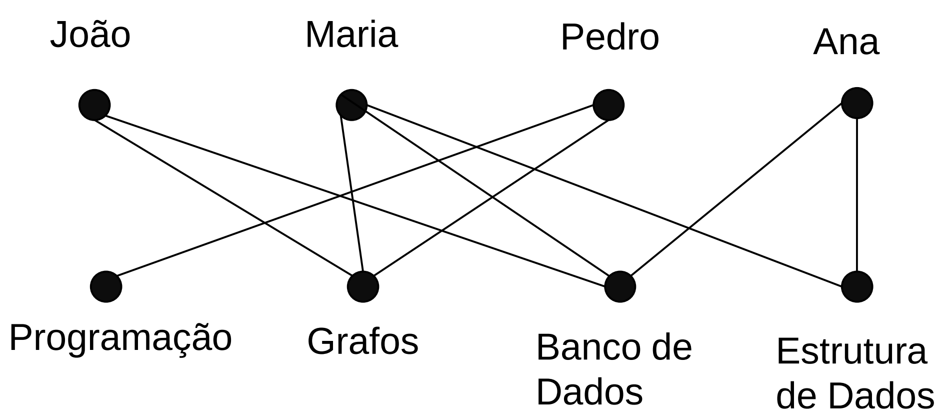
Emparelhamento

- Em um grafo ponderado, um **emparelhamento de peso máximo** é um emparelhamento cuja soma dos pesos das arestas é o maior possível



Emparelhamento

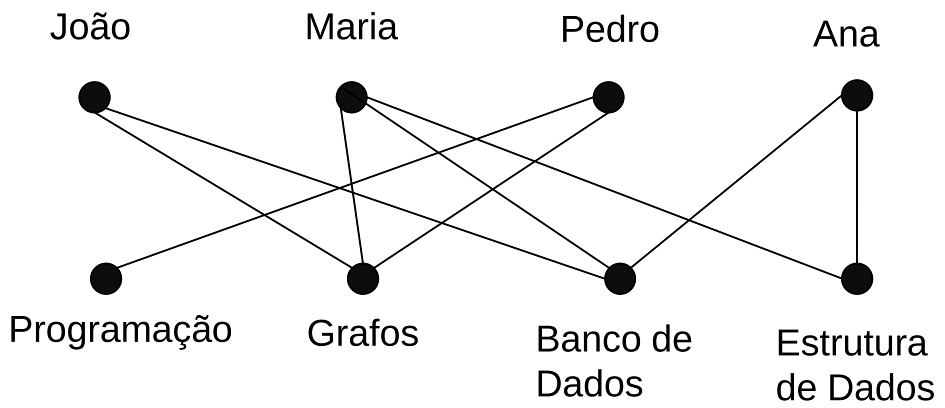
- Exemplo de aplicação
  - Suponha que V_1 representa um conjunto de professores e V_2 um conjunto de disciplinas.
  - Uma aresta liga um professor a todas as disciplinas a que ele está habilitado a lecionar.



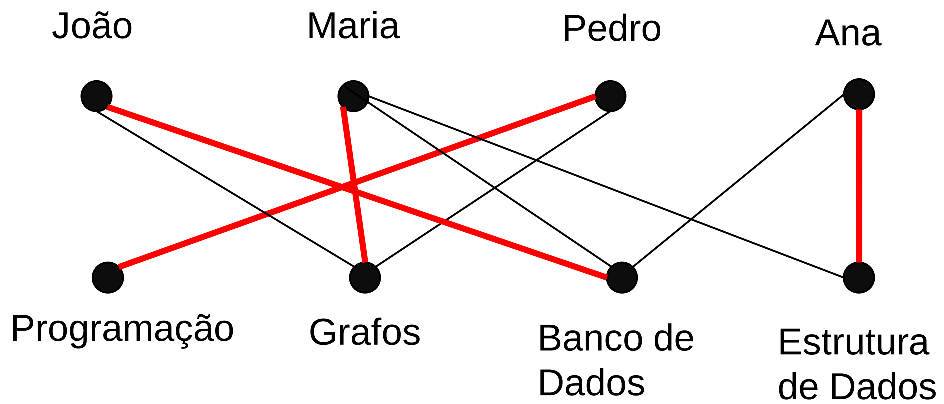
  - Deseja-se alocar as disciplinas respeitando as aptidões dos professores

Emparelhamento

- O problema a ser resolvido é um emparelhamento perfeito em um grafo



- Para o grafo acima, uma solução seria:



Emparelhamento

- Seja S um conjunto de vértices de um grafo
- Define-se a vizinhança de S (N(S)) em G ao subconjunto de nós adjacente a algum vértice de S
- Corolário 1: Um grafo bipartido G com bipartição (X,Y) tem um emparelhamento perfeito se e somente se $|X| = |Y|$ e $|N(S)| \geq |S|$, para todo o $S \subseteq V$
- Corolário 2: Todo grafo bipartido k-regular com $k > 0$ tem um emparelhamento perfeito.

Emparelhamento
Exercícios

- Determinar um emparelhamento máximo do grafo com vértices $v_1, v_2, \cdots, v_9$ definido pela matriz de adjacências

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

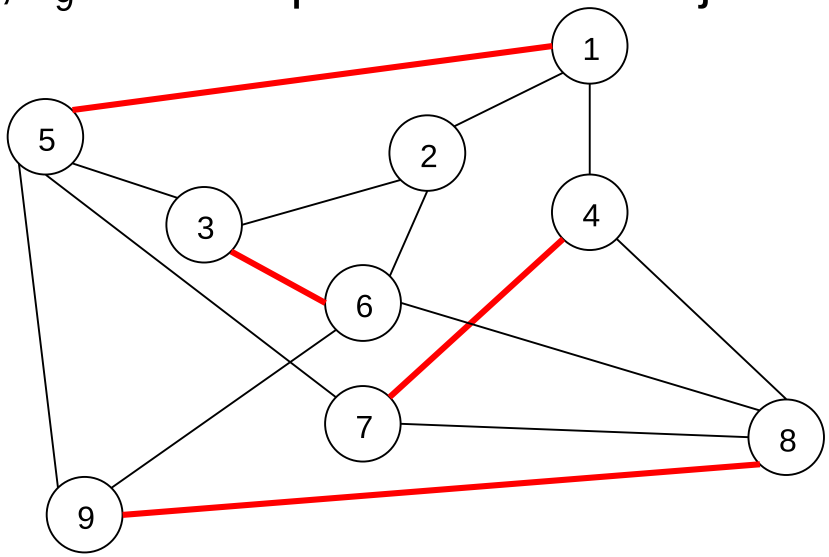
- Quantas arestas tem um emparelhamento máximo num grafo completo com n vértices?

- Quantas arestas tem um emparelhamento máximo em um grafo bipartido completo

Emparelhamento

Solução dos Exercícios

- Determinar um emparelhamento máximo do grafo com vértices $v_1, v_2, \cdots, v_9$ definido pela matriz de adjacências anterior



- Quantas arestas tem um emparelhamento máximo num grafo completo com V vértices? $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$

- Quantas arestas tem um emparelhamento máximo em um grafo bipartido completo? A cardinalidade do menor conjunto entre os conjuntos (V_1 e V_2) que formam a bipartição de vértices

Revisão

- Grafo bipartido
  - Admite particionamento de vértices onde cada aresta liga um vértice de um conjunto V_1 a outro do outro conjunto V_2
  - Completo – há arestas de todos os vértices de V_1 a todos os vértices de V_2 ($K_{v1,v2}$)

- Emparelhamento (*matching*)
  - Subconjunto de arestas em que nenhuma liga o mesmo vértice
  - Maximal – não é possivel adicionar arestas
  - Máximo – usa o máximo de arestas possível
  - Perfeito – liga todos os vértices
  - Peso máximo – maior soma possível do peso das arestas

Bibliografia

- Goldbarg, M.; Goldbarg, E. **Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações**. 1ª edição. Elsevier, 2012.

- Boaventura Netto, P. O. **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**. 4a edição. Edgar Blucher, 2012.