# A15 Planaridade

## CSI466 Teoria dos Grafos

Prof. Dr. George H. G. Fonseca
Universidade Federal de Ouro Preto

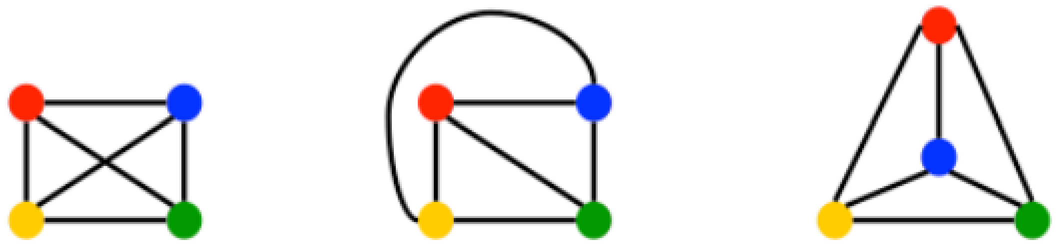
# Planaridade

- Um grafo G é **planar** se existe uma representação de G no plano sem cruzamento de arestas

- O grafo $K_4$ é planar?

# Planaridade

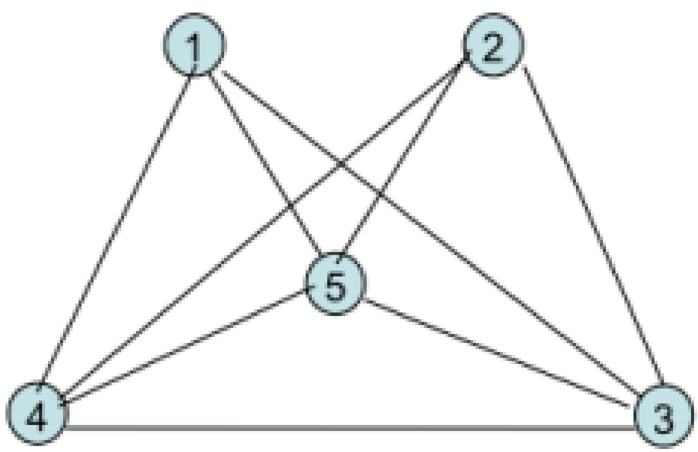
- Três representações distintas para um grafo $K_4$:



- Logo, o grafo $K_4$ é planar, pois admite pelo menos uma representação no plano sem que haja cruzamento de arestas (representação planar).

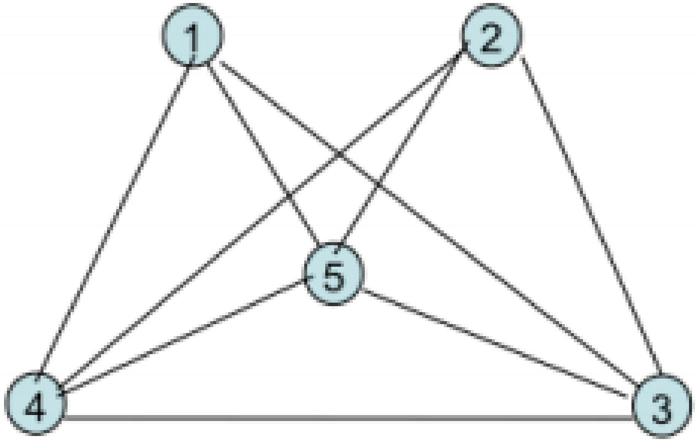
- Dizemos que uma representação planar de um grafo planar é um **grafo plano**

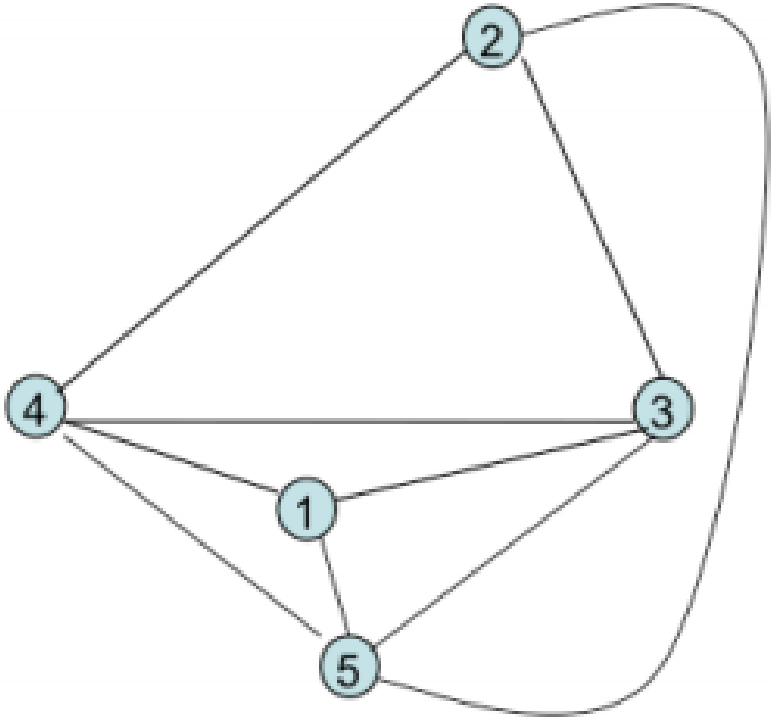
- O grafo abaixo é planar?



- O grafo abaixo é planar?

SIM!

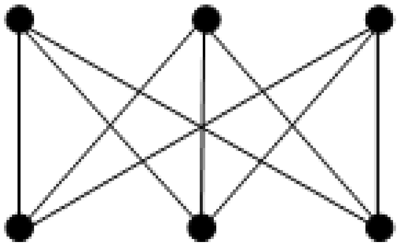


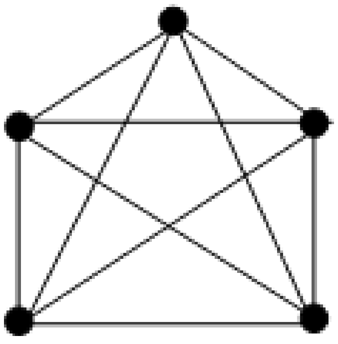
# Grafos não Planares

- Nem todos os grafos são planares.

- $K_{3,3}$ é não-planar



- $K_5$ é não planar



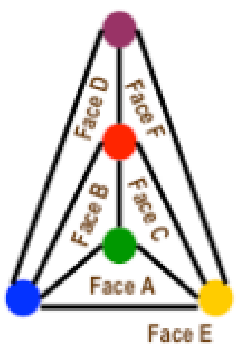
# Planaridade

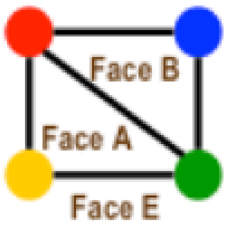
- Todo subgrafo de um grafo planar é planar
- Todo grafo que tem um subgrafo não planar é não planar.
- Todo grafo que contém o $K_{3,3}$ ou $K_5$ como subgrafos é não planar.

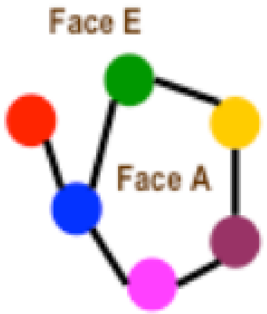
# Região ou Face

- Se G é um grafo planar, então a representação planar de G divide o plano em um conjunto de regiões, conhecidas como faces

- Cada região é caracterizada pelas arestas que a contornam.



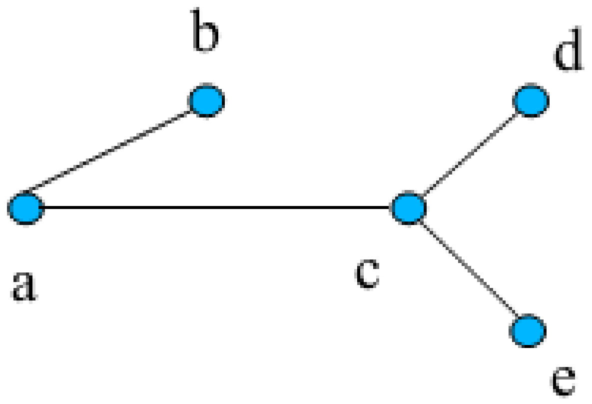




- A região que engloba o grafo é chamada face ilimitada

# Região ou Face

- Se G contém um ciclo, tem-se pelo menos duas regiões: uma dentro do ciclo e outra fora dele

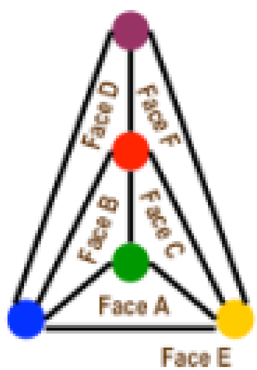
- No caso das árvores que não possuem ciclos, temos uma única região.
  - Toda árvore é planar



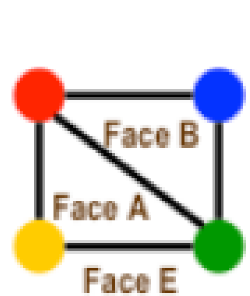
# Fórmula de Euler

- Seja G um grafo conexo planar com V vértices e E arestas.
- O número de faces do grafo é:

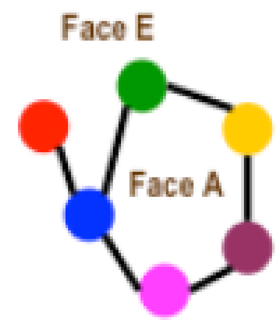
$$f = |E| - |V| + 2$$



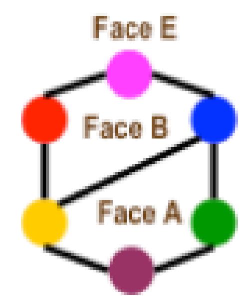

$f = 9-5+2$
$f = 6$




$f = 5-4+2$
$f = 3$




$f = 6-6+2$
$f = 2$

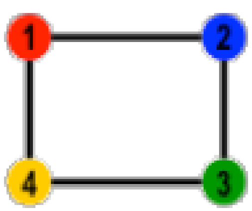



$f = 7-6+2$
$f = 3$

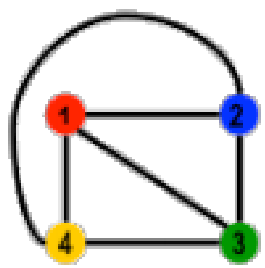
# Limite de Arestas

- Teorema: Se G é planar, conexo, simples, com $|V| > 2$ vértices e E arestas, então

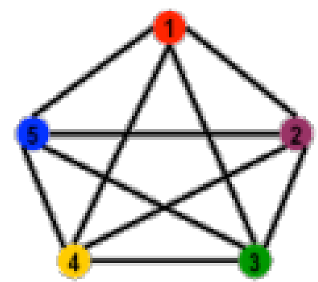
$$|E| \leq 3|V| - 6$$




$4 \leq 3x4 - 6$
$4 \leq 6$




$6 \leq 3x4 - 6$
$6 \leq 6$




$10 \leq 3x5 - 6$
$10 \leq 9$

  - Este teorema mostra que $K_5$ não é planar, uma vez que $10 > 9$.
  - Generalização: $K_n$ é planar somente se $|V| \leq 4$

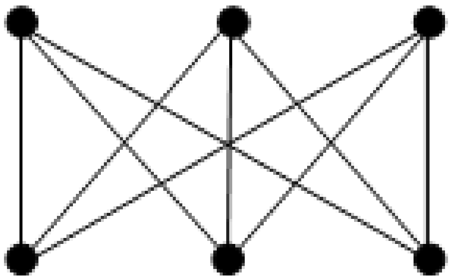
# Limite de Arestas

- Porém há grafos não planares para os quais a relação

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

  também vale:

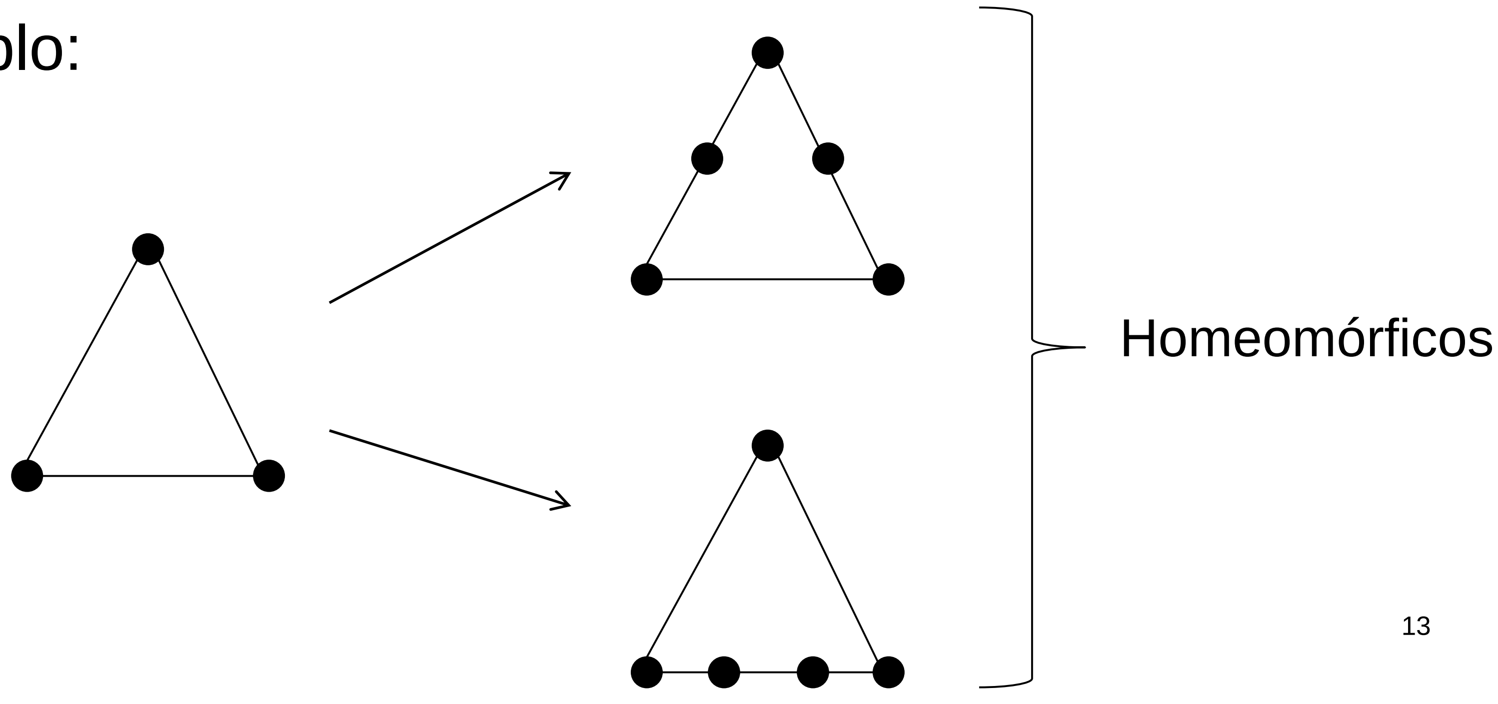
  - $K_{3,3}$: 9 < (3x6) - 6 e $K_{3,3}$ não é planar



# Homeomorfismo

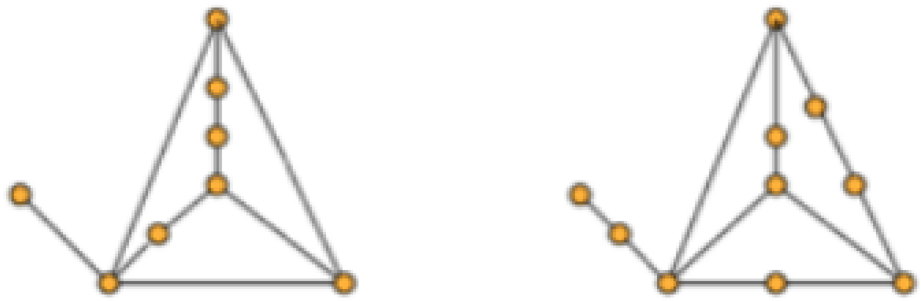
- Dois grafos são **homeomórficos** se ambos podem ser obtidos a partir do mesmo grafo através da inserção/remoção de vértices de grau 2 em suas arestas

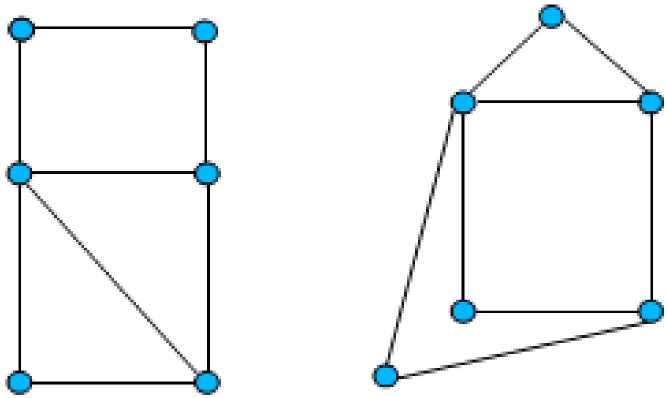
- Exemplo:



# Homeomorfismo

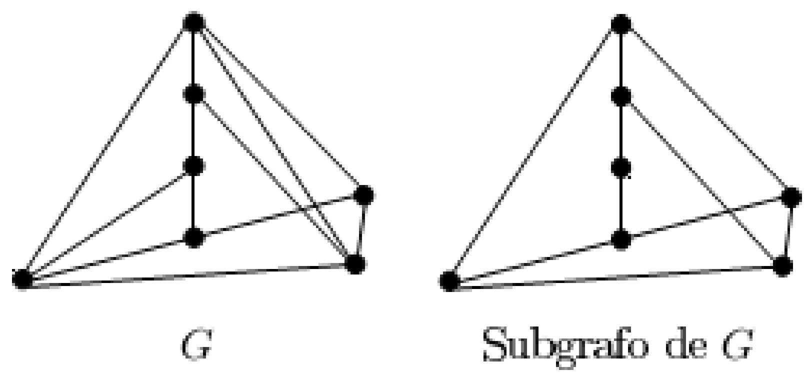
- Mais exemplos



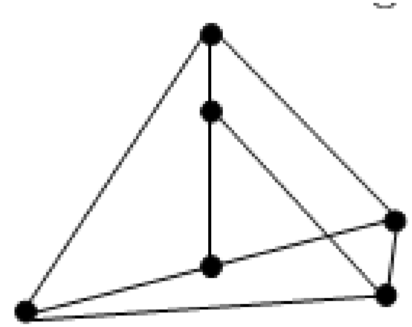


# Planaridade e Homeomorfismo

- Teorema: Um grafo G é planar se, e somente se, não possuir nenhum um subgrafo que seja homeomórfico a $K_5$ ou $K_{3,3}$.

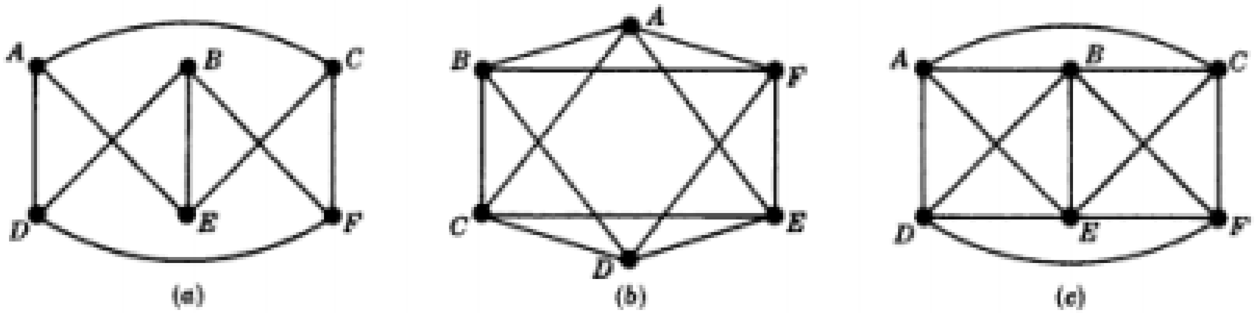



$K_{3,3}$

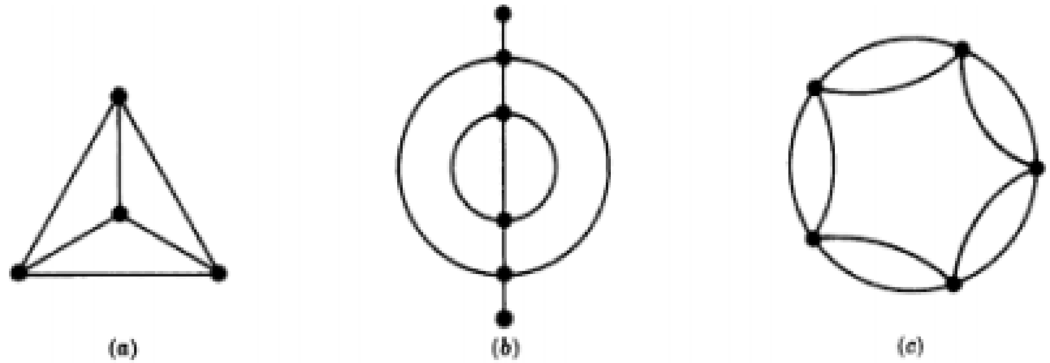


# Planaridade
## *Exercícios*

- Desenhe uma representação planar de cada grafo da figura abaixo, se possível

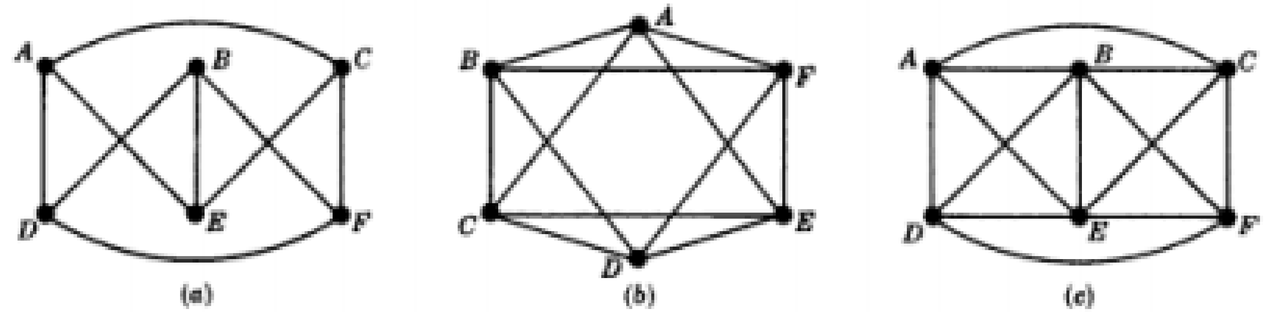


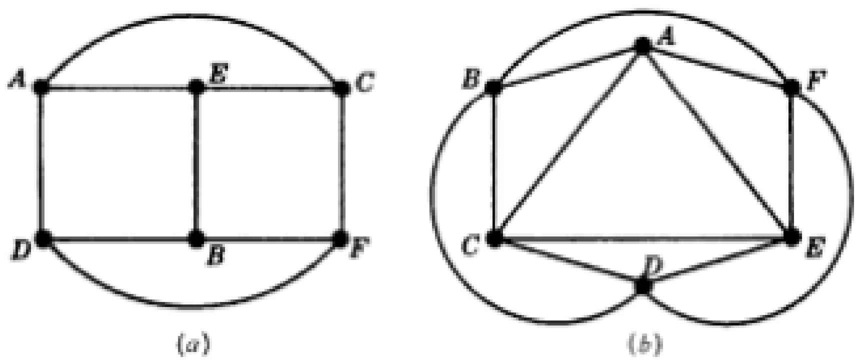

- Conte o número V de vértices, o número E de arestas de cada grafo abaixo e verifique a fórmula de Euler.

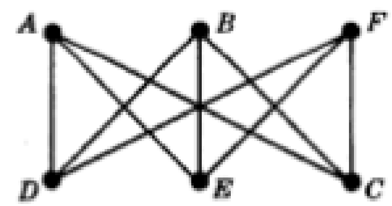


# Planaridade

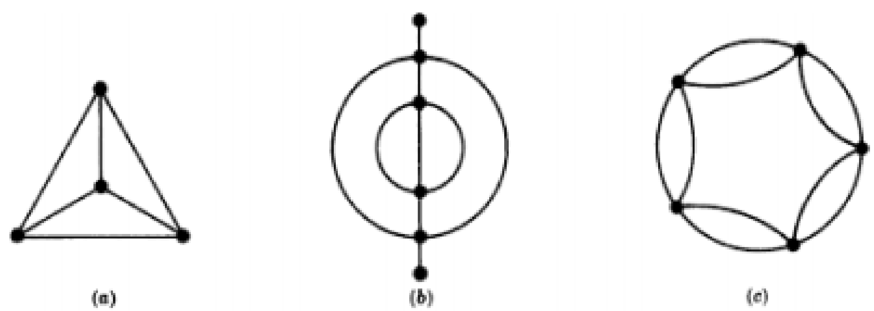
## *Solução dos Exercícios*







Não é planar!



f = |E| – |V| + 2

f = 4 f = 5 f = 7

# Revisão

- Planaridade
  - Um grafo é planar se admite uma representação sem cruzamento de arestas
  - Faces – a representação planar divide o grafo em faces, sendo f = |E| – |V| + 2

- Homeomorfismo
  - Grafos são homeomórficos se podem ser obtidos do mesmo grafo a partir da inserção de novos vértices de grau 2 em suas arestas

- Um grafo G é planar se, e somente se, não possuir nenhum um subgrafo que seja homeomórfico a $K_5$ ou $K_{3,3}$

# Bibliografia


- Goldbarg, M.; Goldbarg, E. **Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações**. 1ª edição. Elsevier, 2012.

- Boaventura Netto, P. O. **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**. 4a edição. Edgar Blucher, 2012.