

# Heurística Matemática aplicada ao Problema da Coloração de Grafos

Projeto de pesquisa submetido à apreciação da Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação da Universidade Federal de Ouro Preto como parte das exigências do EDITAL PIP-2S/UFOP N° 03/2017.

Área CNPq: Ciência da Computação / Metodologia e Técnicas da Computação.

João Monlevade, Maio, 2017.

Professor - George Henrique Godim da Fonseca

Aluno - a definir

## 1 Resumo

O problema da Coloração de Grafos consiste em atribuir uma cor a cada vértice de modo que vértices adjacentes não possuam a mesma cor. Esse problema é muito estudado na área de Otimização Combinatória. Dentre as aplicações mais comuns desse problema encontram-se: Agendamento de Horários Educacionais, Planejamento de Equipes de Trabalho, Alocação de Registradores, entre outros. Diversas técnicas computacionais foram testadas para solucionar esse problema, com destaque para o algoritmo D-Satur e para as metaheurísticas. Formulações de programação inteira também foram propostas ao problema; porém, seu uso se torna inviável quando o número de vértices é elevado. Uma heurística matemática é um algoritmo que se utiliza de um modelo de programação inteira para obter soluções heurísticas a um problema. Até onde se tem conhecimento essa abordagem nunca foi aplicada ao problema de coloração de grafos, apesar de ter obtido resultados expressivos quando aplicado a problemas que possuem estrutura similar. Nesse sentido, o presente projeto tem como objetivo propor uma heurística matemática ao problema da Coloração de Grafos e avaliar sua eficiência em variadas estratégias de decomposição.

**Palavras-chave:** Coloração de Grafos, Heurística Matemática, Programação Inteira, D-Satur, Teoria dos Grafos.

## 2 Introdução

Um grafo,  $G = (V, E)$ , é uma estrutura matemática composta por um conjunto de vértices  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e um conjunto de ligações entre esses vértices, denominado arestas  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Além de seu valor teórico para os estudos em Ciência da Computação e Matemática, diversas aplicações reais podem ser modeladas e resolvidas por algoritmos em grafos. Sistemas de navegação por GPS usam algoritmos de caminho mínimo em grafos para traçar as melhores rotas. Estudos em redes sociais são feitos através da modelagem da rede como um grafo e da análise das conexões. Redes de computadores têm o envio de pacotes de dados otimizados através de algoritmos em grafos, dentre outras aplicações [9].

Esse trabalho aborda em específico o problema da Coloração de Grafos, que consiste em, para cada vértice  $v \in V$ , atribuir uma cor  $c \in C$  de modo que vértices adjacentes, i.e. que estão ligados por aresta a  $v$ , não possuam a mesma cor. O número de cores deve ser o mínimo possível. Há uma larga gama de aplicações práticas desse problema.

Dentre as técnicas mais aplicadas para solucionar o problema, encontram-se o algoritmo D-Satur [2], um algoritmo guloso que atribui a menor cor possível a um vértice por iteração. A seleção do vértice a ser processado é definida pelo grau de saturação do mesmo; ou seja, o vértice que possui mais restrições de cores a serem atribuídas é escolhido primeiro. Essa ordem é dinamicamente atualizada. Técnicas metaheurísticas, como Busca Tubo [8], *Simulated Annealing* [10] e Algoritmos Evolucionários [12] também são comumente aplicadas para so-

lucionar esse problema. Essas metaheurísticas normalmente são aplicadas para refinar soluções iniciais obtidas por algoritmos gulosos.

Formulações de programação inteira também foram propostas ao problema [13]; porém, seu uso se torna inviável quando o número de vértices é elevado. Uma heurística matemática, ou *matheuristic*, é um algoritmo que se utiliza de um modelo de programação inteira para obter soluções heurísticas a um problema. A abordagem mais comum nesse contexto é decompor o problema original e otimizar um subproblema por iteração. Os primeiros relatos de aplicação dessa estratégia são recentes, o que indica que há ainda muitos estudos e aplicações a serem feitos. Até onde se tem conhecimento essa abordagem nunca foi aplicada ao problema de coloração de grafos, apesar de ter obtido resultados expressivos quando aplicado a problemas que possuem estrutura similar [6, 15].

### 3 Objetivos

O principal objetivo do presente projeto é estudar e desenvolver heurísticas matemáticas baseadas em decomposição para o problema da Coloração de Grafos. Como objetivos específicos, cita-se:

- Realizar um levantamento bibliográfico das melhores estratégias computacionais para solucionar o problema;
- Propor a primeira heurística matemática para a Coloração de Grafos;
- Melhorar as melhores soluções conhecidas para as instâncias abertas na literatura;
- Analisar a viabilidade e o comportamento do algoritmo para grafos oriundos de variadas aplicações.

## 4 Relevância da Contribuição

Esse é um conhecido problema da classe NP-Difícil [7], o que atrai o interesse da comunidade científica de Computação e Pesquisa Operacional. Além disso, o problema abordado nesse projeto possui diversas aplicações práticas, como por exemplo:

- Agendamento de horários educacionais [14];
- Planejamento de projetos [16];
- Alocação de registradores [3, 4];
- Atribuição de canais em redes sem fio [12];
- Agendamento de tarefas em máquinas [11];
- Agendamento de competições esportivas [5];
- Planejamento de tráfego aéreo [1].

## 5 Metodologia

Serão utilizadas instancias da DIMACS *Implementation Challenge* (<http://dimacs.rutgers.edu/Challenges/>) para avaliar os resultados do(s) algoritmo(s) desenvolvido(s). Esse conjunto de instâncias contempla problemas de variadas dimensões, graus de dificuldade e aplicações. Além disso, é um conjunto amplamente utilizado pela comunidade científica. As etapas principais do desenvolvimento do trabalho são assim definidas:

**Revisão da literatura** Levantamento e estudo da bibliografia dos trabalhos relevantes relacionados aos conceitos utilizados e algoritmos estado-da-arte para a solução do problema.

**Reprodução do algoritmo D-Satur** Implementação do algoritmo D-Satur e de eventuais outro(s) algoritmos que se mostrarem relevantes na literatura recente.

**Desenvolvimento de formulação de programação matemática** Formulação do problema como um problema de Programação Inteira e sua respectiva implementação.

**Implementação da heurística matemática** Estudo de estratégias para a decomposição do problema e implementação da heurística matemática.

**Avaliação computacional das técnicas desenvolvidas** Realização de experimentos computacionais sistemáticos sobre as técnicas desenvolvidas no trabalho e análise desses resultados para concluir sobre a eficiência do método proposto.

**Redação do relatório** Redação do relatório científico requerido pelo edital e redação de eventuais trabalhos científicos de acordo com a magnitude dos resultados obtidos.

## 6 Cronograma

Atividade \ Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Revisão da literatura	X	X										
D-Satur		X	X									
Programação Matemática			X	X								
Heurística Matemática					X	X	X	X				
Análise computacional									X	X	X	
Redação do relatório												X

## Referências

- [1] Nicolas Barnier and Pascal Brisset. Graph coloring for air traffic flow management. *Annals of Operations Research*, 130(1):163–178, 2004.
- [2] Daniel Brélaz. New methods to color the vertices of a graph. *Communications of the ACM*, 22(4):251–256, 1979.
- [3] Gregory J Chaitin. Register allocation & spilling via graph coloring. In *ACM Sigplan Notices*, volume 17, pages 98–105. ACM, 1982.
- [4] Fred C. Chow and John L. Hennessy. The priority-based coloring approach to register allocation. *ACM Trans. Program. Lang. Syst.*, 12(4):501–536, October 1990.
- [5] Andreas Drexler and Sigrid Knust. Sports league scheduling: Graph-and resource-based models. *Omega*, 35(5):465–471, 2007.
- [6] George H.G. Fonseca, Haroldo G. Santos, and Eduardo G. Carrano. Integrating matheuristics and metaheuristics for timetabling. *Computers & Operations Research*, 74:108 – 117, 2016.
- [7] Michael R Garey and David S Johnson. *Computers and intractability*, volume 29. wh freeman New York, 2002.
- [8] Alain Hertz and Dominique de Werra. Using tabu search techniques for graph coloring. *Computing*, 39(4):345–351, 1987.
- [9] Tommy R Jensen and Bjarne Toft. *Graph coloring problems*, volume 39. John Wiley & Sons, 2011.
- [10] David S Johnson, Cecilia R Aragon, Lyle A McGeoch, and Catherine Schevon. Optimization by simulated annealing: an experimental evaluation; part ii, graph coloring and number partitioning. *Operations research*, 39(3):378–406, 1991.
- [11] Ahmed Kouider, Hacène Ait Haddadène, Samia Ourari, and Ammar Oulamara. Mixed integer linear programs and tabu search approach to solve mixed graph coloring for unit-time job shop scheduling. In *Automation Science and Engineering (CASE), 2015 IEEE International Conference on*, pages 1177–1181. IEEE, 2015.
- [12] Marlon P Lima, Thales B Rodrigues, Rafael F Alexandre, Ricardo HC Takahashi, and Eduardo G Carrano. Using evolutionary algorithms for channel assignment in 802.11 networks. In *Computational Intelligence for Communication Systems and Networks (CICComms), 2014 IEEE Symposium on*, pages 1–8. IEEE, 2014.
- [13] Anuj Mehrotra and Michael A Trick. A column generation approach for graph coloring. *informatics Journal on Computing*, 8(4):344–354, 1996.

- [14] GA Neufeld and John Tartar. Graph coloring conditions for the existence of solutions to the timetable problem. *Communications of the ACM*, 17(8):450–453, 1974.
- [15] Haroldo G Santos, Túlio AM Toffolo, Rafael AM Gomes, and Sabir Ribas. Integer programming techniques for the nurse rostering problem. *Annals of Operations Research*, 239(1):225–251, 2016.
- [16] Nicolas Zufferey. Graph coloring tabu search for project scheduling. In *Advanced Computational Methods for Knowledge Engineering*, pages 107–118. Springer, 2015.