
Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas
Curso Sistemas de Informação



**Métodos de Fluxo em Redes para
o Problema da Alocação
Biproporcional de Assentos
Parlamentares**

Matheus Guedes Vilas Boas

**TRABALHO DE
CONCLUSÃO DE CURSO**

ORIENTAÇÃO:
PROF. MSc. George Henrique Godim da Fonseca

Maio, 2013
João Monlevade/MG

Matheus Guedes Vilas Boas

**Métodos de Fluxo em Redes para o Problema da
Alocação Biproporcional de Assentos
Parlamentares**

Orientador: Prof. MSc. George Henrique Godim da Fonseca

Monografia apresentada ao Curso de
Sistemas de Informação do Departamento de
Ciências Exatas e Aplicadas, como requisito
parcial para aprovação na Disciplina
Trabalho de Conclusão de Curso II.

Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
Mai de 2013

ATA DE DEFESA

Aos 16 dias do mês de maio de 2013, às 12 horas e 45 minutos, na Universidade Federal de Ouro Preto – Campus João Monlevade, foi realizada a defesa de Monografia pelo aluno **Matheus Guedes Vilas Boas**, sendo a Comissão Examinadora constituída pelos professores: Prof. MSc. George Henrique Godim da Fonseca e Prof. Dr. Flávio Vinícius Cruzeiro Martins. O candidato apresentou a monografia intitulada: “*Métodos de Fluxo em Redes para o Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares*”. A comissão examinadora deliberou, por unanimidade, pela aprovação do candidato, concedendo-lhe o prazo de 15 dias para incorporação no texto final das alterações sugeridas. Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da Comissão Examinadora e pelo formando.

João Monlevade, 16 de maio de 2013.

Prof. MSc. George Henrique Godim da Fonseca

Prof. Dr. Flávio Vinícius Cruzeiro Martins

Matheus Guedes Vilas Boas

FOLHA DE APROVAÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

Métodos de Fluxo em Redes para o Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares

Matheus Guedes Vilas Boas

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial da disciplina CEA499 – Trabalho de Conclusão de Curso II, do curso de Bacharelado em Sistemas de Informação, e aprovada pela Banca Examinadora abaixo assinada:

Prof. MSc. George Henrique Godim da Fonseca
Mestre em Ciência da Computação pela Universidade Federal de Ouro Preto – MG, Brasil
Orientador
Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas - UFOP

Prof. Dr. Flávio Vinícius Cruzeiro Martins
Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Minas Gerais – MG, Brasil
Examinador
Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas - UFOP

João Monlevade, 16 de maio de 2013

TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado “**Métodos de Fluxo em Redes para o Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares**” é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico, código fonte de programa ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem as devidas referências ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 16 de maio de 2013

Matheus Guedes Vilas Boas

Resumo

O Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares consiste na distribuição de assentos de forma proporcional a população de cada distrito e ao desempenho eleitoral de cada partido em um dado sistema eleitoral. O problema é alvo de constantes discussões em trabalhos da literatura, bem como em vários sistemas eleitorais ao redor do mundo. O presente trabalho propõe uma abordagem de solução para o problema, reduzindo-o a um Problema do Fluxo de Custo Mínimo. Foram usados o Algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos, Algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos, Algoritmo Primal-Dual e um modelo de programação inteira para a resolução do problema. Foram usadas várias instâncias da literatura para a comparação entre os métodos implementados. Os resultados obtidos foram satisfatórios, principalmente para as instâncias relacionadas ao Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares, cujo tempo de execução foi desprezível e a solução ótima sempre encontrada. Para as instâncias genéricas do Problema do Fluxo de Custo Mínimo, os resultados do modelo de programação inteira foram de longe os melhores dentre as técnicas para solucionar o problema. Para os outros três algoritmos desenvolvidos, resultados razoáveis foram encontrados, sendo que para algumas instâncias não foi possível encontrar a solução ótima respeitando o critério de parada.

Abstract

The Biproporcional Seat Apportionment Problem consists in the distribution of seats in proportion to the population of each electoral district and the performance of each party in a given election system. The problem is the subject of ongoing discussions on literature as well as in several electoral systems around the world. This paper proposes a solution to the problem, reducing it into a Minimum Cost Flow Problem. The algorithms Canceling Negative Cycles, Paths Algorithm Successive Minima, Primal-Dual Algorithm were used, as well as an integer programming model to solve the problem. Several instances from the literature were used to compare the implemented methods. The results were satisfactory, especially for the instances related to the Biproporcional Seat Apportionment Problem, whose execution time was negligible and the optimal solution is always found. For generic instances of the Minimum Cost Flow Problem, the results of the integer programming model were by far the best of the techniques to solve the problem. For the other three algorithms developed, reasonable results were found, and for some instances it was not possible to find the optimum solution respecting the stopping criterion.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por sempre ter me dado força para não desistir e principalmente por me proporcionar o prazer de viver!

Agradeço ao professor MSc. George Henrique Godim da Fonseca, orientador do corrente trabalho, pela dedicação, compromisso e principalmente pela confiança depositada em mim.

Agradeço ao professor Dr. Flávio Vinícius Cruzeiro Martins, membro da banca examinadora desse trabalho, pelos conhecimentos que me proporcionou durante a graduação.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para a minha formação, sempre com o prazer e dedicação em ensinar.

Agradeço a minha mãe Inês Alves Guedes, por estar durante todo o período de graduação ao meu lado, oferecendo todo o apoio e carinho necessário para que o objetivo fosse alcançado.

Agradeço a meu pai Luiz Carlos Vilas Boas, pelos momentos vividos durante o período da graduação, pelo amor e carinho sempre presentes.

Agradeço ao meu irmão Lucas Guedes Vilas Boas, por toda a ajuda oferecida não só nesse trabalho, como em toda a graduação. Além da ajuda, agradeço por sempre acreditar no meu sucesso na graduação.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para que eu conseguisse alcançar esse objetivo de grande importância na minha vida.

Muito obrigado a todos!

Sumário

1. INTRODUÇÃO	11
1.1. REVISÃO LITERÁRIA	12
1.2. OBJETIVO DO TRABALHO	14
1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	15
2. PROBLEMA DA ALOCAÇÃO BIPROPORCIONAL DE ASSENTOS PARLAMENTARES	16
2.1. DEFINIÇÃO FORMAL PARA O PROBLEMA	19
2.2. SISTEMA ELEITORAL ITALIANO	21
2.3. SISTEMA ELEITORAL ESPANHOL	21
2.4. SISTEMA ELEITORAL EUROPEU	22
2.5. SISTEMA ELEITORAL BRASILEIRO	23
3. MODELAGEM E MÉTODOS DE FLUXO EM REDES	25
3.1. PROBLEMA DO FLUXO DE CUSTO MÍNIMO (PFCM)	25
3.2. MÉTODOS UTILIZADOS	28
3.2.1. PROGRAMAÇÃO INTEIRA	28
3.2.2. ALGORITMO DE CANCELAMENTO DE CICLOS NEGATIVOS	29
3.2.3. ALGORITMO DE SUCESSIVOS CAMINHOS MÍNIMOS	32
3.2.4. ALGORITMO PRIMAL-DUAL	35
3.3. REDUÇÃO DO PABAP PARA O PROBLEMA DO FLUXO DE CUSTO MÍNIMO	36
4. EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	41
4.1. INSTÂNCIAS PARA O PROBLEMA DA ALOCAÇÃO BIPROPORCIONAL	42
4.2. INSTÂNCIAS GENÉRICAS PARA O PROBLEMA DO FLUXO DE CUSTO MÍNIMO	43
4.3. ANÁLISE DOS RESULTADOS	46
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
APÊNDICE A – PUBLICAÇÃO	51
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	52

Lista de Figuras

Figura 3.1 – Rede R para o Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares

Figura 3.2 – Algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos (CAMPONOGARA, 2006)

Figura 3.3 – Rede inicial

Figura 3.4 – Passo 1: Obtenção do fluxo inicial

Figura 3.5 – Rede residual da 1ª iteração

Figura 3.6 – Rede após 1ª iteração

Figura 3.7 – Rede residual da 2ª iteração

Figura 3.8 – Rede após 2ª iteração

Figura 3.9 – Rede residual da 3ª iteração

Figura 3.10 – Rede com fluxo ótimo

Figura 3.11 – Algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos (SILVA, 2013)

Figura 3.12 – Rede inicial (SCM)

Figura 3.13 – Caminho mínimo na 1ª iteração

Figura 3.14 – Rede residual (SCM)

Figura 3.15 – Caminho mínimo na 2ª iteração

Figura 3.16 – Algoritmo Primal-Dual (SILVA, 2013)

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Resultados obtidos na eleição

Tabela 2.2 – População nacional

Tabela 4.1 – Características das instâncias do PABAP

Tabela 4.2 – Resultados obtidos para as instâncias do PABAP

Tabela 4.3 – Maior e Menor Representatividade das instâncias do PABAP

Tabela 4.4 – Características das instâncias genéricas para o PFCM

Tabela 4.5 – Tempo (em segundos) de execução dos algoritmos para o PFCM

Tabela 4.6 – Solução encontrada na execução dos algoritmos para o PFCM

1. Introdução

O Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares (PABAP) consiste basicamente em alocar assentos em determinado congresso nacional de forma proporcional a população dos distritos e a influência dos partidos políticos no resultado das eleições. Esse problema é fortemente discutido em vários trabalhos presentes na literatura.

Na ordem cronológica de tempo, Pennisi et. al. (2006, 2008) discutem sobre a alocação biproporcional na Itália. Ramirez et. al. (2008) estudam o sistema eleitoral espanhol. Por sua vez, Pulkelsheim et. al. (2011) abordam de forma genérica problemas ocorridos em alguns congressos ao redor do mundo. Por fim, Akartunali e Knight (2013) dão ênfase à distribuição de assentos resultantes das últimas eleições ocorridas no Reino Unido.

É dada uma grande importância a esse problema devido às constantes discussões existentes entre partidos e distritos de vários países relacionadas à quantidade de cadeiras reservadas para cada um no Congresso Nacional.

Acredita-se que, pelos trabalhos estudados na literatura, não exista uma técnica perfeita para o cálculo de assentos de maneira biproporcional, isto é, proporcional à população de um distrito qualquer e proporcional ao número de votos recebido de certo partido.

Para a resolução do problema, o trabalho a seguir reduz o problema em questão em um Problema do Fluxo de Custo Mínimo em Redes. Isso é possível, uma vez que temos um conjunto de distritos e um conjunto de partidos que podem ser considerados nós de oferta e nós de demanda em uma rede. A lei de Conservação de Fluxo na Rede garante que a modelagem proposta distribuirá todos os assentos disponíveis em determinado país.

Em linhas gerais, o objetivo da modelagem em redes para o PABAP é a minimização do erro na distribuição de assentos parlamentares dos distritos aos partidos, com a garantia de que ambos receberão a quantidade de assentos que lhes foram previamente reservadas. O erro é definido como a diferença entre a quantidade de assentos que deveria ser alocada a determinado partido em certo

distrito (quantidade provavelmente fracionária) e a quantidade de assentos que a modelagem em redes alocou (quantidade inteira).

O modelo decidirá se arredondará para cima ou para baixo a parte fracionária resultante da divisão do número de votos obtidos por cada partido em cada distrito. Visto isso e sendo o objetivo do problema a minimização do erro na distribuição de assentos, provavelmente serão alocados mais assentos aos partidos que possuem uma maior parte fracionária.

Foram usados três algoritmos para a resolução do problema. São eles: Algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos (KLEIN, 1967), Algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos (JEWELL, 1958) e o Algoritmo Primal-Dual (FORD e FULKERSON, 1962). Além desses, também foi usado um modelo de programação inteira para resolver o problema. Todas essas estratégias de resolução do problema serão explicadas com mais detalhes nos próximos capítulos.

1.1. Revisão literária

Pukelsheim et. al. (2011), em seu trabalho denominado “*Network Flow Methods for Electoral Systems*”. Os autores enfatizam os vários países que enfrentam problemas em seus sistemas eleitorais no que se refere à distribuição biproporcional de assentos (cadeiras), ressaltando a existência de técnicas de soluções razoáveis.

Através dos resultados obtidos ao longo do trabalho, Pukelsheim et. al. (2011) afirmam que os modelos e algoritmos de fluxo de rede são justos na resolução do problema, sendo realmente ferramentas muito flexíveis e eficazes para a análise e o projeto de sistemas eleitorais contemporâneos.

Os autores consideram ainda que, o Problema da Distribuição Biproporcional de Assentos seja o principal problema ligado a sistemas eleitorais, em que algoritmos de fluxo de rede são usados. Existe o interesse de alguns sistemas eleitorais nesse problema, mesmo que nesses não sejam considerados os partidos quando da alocação de assentos. Pukelsheim et. al. (2011) destacam isso: este problema surge atualmente nas leis eleitorais de vários países, por exemplo, Itália, México, Suíça, Dinamarca, Ilhas Faroe, etc., mas talvez seja de interesse primário

também nas eleições para o Parlamento Europeu, onde os distritos correspondem aos estados membros da União Européia.

No próximo capítulo do trabalho, inclusive, será discutido o Parlamento Europeu e também o Parlamento Brasileiro, que são semelhantes ao menos na distribuição **apenas proporcional** de assentos.

Akartunali e Knight (2013) relatam em seu trabalho intitulado “*Network Models and Biproportional Apportionment for Fair Seat Allocations in the UK Elections*”, o uso da modelagem em fluxo de rede para a resolução do Problema da Alocação Biproporcional de Assentos. Para verificar a eficiência do uso dessa abordagem, foram usados dados reais das eleições ocorridas em 2010 no Reino Unido. A técnica utilizada no país, nas eleições de 2010, distribuía todos os assentos de cada distrito eleitoral para o partido com mais votos, implicando na não proporcionalidade de alocação de assentos em um sistema multipartidário. Um fato relevante a ser considerado aqui é que no Reino Unido cada distrito deve ter apenas um representante. Sendo assim, o partido que recebeu mais votos em determinado distrito, torna-se o representante do mesmo no Congresso Nacional.

A abordagem utilizada no trabalho de Akartunali e Knight (2013) divide o problema em questão em duas fases, sendo a primeira caracterizada pela alocação proporcional de assentos aos partidos em relação ao resultado nacional das eleições. A outra fase ajusta a divisão de assentos entre os distritos eleitorais e os partidos. Uma característica da técnica utilizada, que difere da que será realizada no trabalho aqui apresentado, são os ajustes adicionais realizados para uma proporcionalidade justa, de acordo com o eleitorado.

Tais ajustes foram realizados com base no resultado das eleições de 2010 no Reino Unido, tornando a técnica utilizada no trabalho coerente apenas para os dados eleitorais em questão.

Técnicas adicionais para a resolução do Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares são propostas por alguns autores. Eck, Visagic e Kock (2005) demonstram ao longo de seu trabalho (“*Fairness of seat allocation methods in proportional representation*”) que o método utilizado para a alocação dos assentos na África do Sul é falho. O método falha proporcionalmente a quantidade de partidos existentes. Consequentemente, quanto maior essa quantidade, mais votos válidos são “ignorados” pelo método.

Sucintamente, é dada uma definição da estratégia de resolução do método: o método requer que os votos de cada partido sejam divididos por uma quota, que representa o número de votos necessários para uma cadeira. Para a determinação da quota, é aplicada uma fórmula denominada “*Droop quota*”. Um número racional de assentos é dado a cada um dos partidos. Essa alocação de assentos geralmente inclui uma parte inteira e uma parte fracionária. Cada um dos partidos recebe o número de assentos igual ao valor inteiro. Os assentos que não foram alocados são distribuídos proporcionalmente aos partidos com as maiores partes fracionárias (ECK, VISAGIC e KOCK, 2005).

Oelbermann (2013), no seu trabalho intitulado “*Alternative Scaling algorithm for biproportional divisor methods*”, utiliza um algoritmo denominado “*Alternate Scaling*” para a resolução do problema em questão. Em síntese, o algoritmo executa inicialmente um escalonamento em cada distrito eleitoral e atinge a proporcionalidade entre os partidos em campanha naquele distrito. Posteriormente, é realizado um escalonamento dentro nos partidos, garantindo que estes sejam manipulados de forma proporcional em todos os distritos. Por fim, é realizado o arredondamento, visto que o número de deputados em um Congresso é sempre inteiro (Oelbermann, 2013).

O trabalho realizado por Salmi (2004) utiliza uma técnica denominada “*Biproportional Sainte-Lagué*”, título do referendo trabalho, para a resolução do Problema da Alocação Biproporcional de Assentos. A ideia da técnica consiste em dividir o número de votos recebidos por um partido em um distrito pela multiplicação dos divisores de partido e de distrito. Obter o valor adequado para esses divisores não é trivial. Maiores detalhes são encontrados em Salmi (2004).

1.2. Objetivo do trabalho

O objetivo do presente trabalho é propor uma modelagem do Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares como um Problema do Fluxo de Custo Mínimo em redes. Essa abordagem leva em consideração o fato de que os distritos poderiam representar nós de oferta, ao passo que os partidos

representariam nós de demanda. A forma de alocação distrito / partido será explicitada ao longo do trabalho.

Como objetivo secundário, tem-se o estudo de sistemas eleitorais de alguns países, a fim de se conhecer as técnicas utilizadas para a alocação dos assentos parlamentares de cada país, a cada distrito e partido, bem como os problemas que podem ser gerados com a utilização das mesmas.

Por fim, experimentos computacionais serão realizados para verificar a eficiência da abordagem proposta no trabalho na resolução do PABAP, através de várias instâncias encontradas na literatura baseadas em eleições já realizadas em vários países.

1.3. Organização do trabalho

O Capítulo 2 aborda o Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares, definindo-o formalmente. Além disso, é dada uma ênfase no estudo de vários sistemas eleitorais de países europeus e do sistema eleitoral brasileiro. As técnicas utilizadas em cada eleitorado são discutidas. No Capítulo 3, a modelagem do problema para o Problema do Fluxo de Custo Mínimo em redes é apresentada, bem como são citados e descritos os métodos utilizados para a resolução do problema em questão. O Capítulo 4 descreve os experimentos computacionais realizados a fim de se verificar o quão promissora essa abordagem pode ser para a resolução do problema. Por fim, o Capítulo 5 do trabalho relata as principais conclusões obtidas e as sugestões de trabalhos futuros.

2. Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares

Pesquisadores têm voltado suas atenções para a resolução do Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares (PABAP). A motivação de estudá-lo são os constantes problemas gerados em diversos países em relação aos seus respectivos sistemas eleitorais. Segundo Pukelsheim et. al. (2011), o problema aparece em situações onde toda a região eleitoral, geralmente toda a nação, é subdividida em distritos eleitorais. Por requisitos constitucionais ou legais, os distritos eleitorais devem receber uma quota de assentos proporcionais a sua respectiva população. Paralelamente, deve ser atribuído aos partidos políticos um número de assentos que reflète o seu desempenho eleitoral em todo o país.

Em suma, a ideia do problema é: dada uma quantidade fixa pré-determinada de assentos disponíveis em uma nação, objetiva-se a alocação dos assentos de maneira proporcional à população de cada distrito eleitoral e também ao desempenho de cada partido nas eleições nacionais. Devido a essa característica, surge o nome **Alocação Biproporcional**.

O problema em questão pode ser dividido em duas etapas. Primeiramente, deve-se determinar qual será a quantidade de assentos destinada para cada partido e para cada distrito, de maneira proporcional ao desempenho eleitoral **nacional** de cada partido e a população de cada distrito.

A segunda etapa diz respeito à distribuição de assentos de cada um dos distritos aos partidos eleitorais. Essa distribuição é diretamente proporcional ao desempenho eleitoral **regional (por distrito)** de cada partido. Vale lembrar que a alocação realizada na segunda etapa deve respeitar a quantidade de assentos para partidos e distritos definida na primeira etapa. A seguir, é dado um exemplo para esclarecer a primeira etapa do problema.

Suponha um país que esteja dividido em cinco distritos eleitorais denominados D1, D2 até D5. Existem nesse país quatro partidos, denominados P1, P2 até P4. Serão disponibilizados 20 assentos no Congresso. Os resultados nacionais obtidos na eleição ocorrida num dado ano, bem como a população de cada um dos distritos são mostrados nas tabelas 2.1 e 2.2.

Tabela 2.1 – Resultados obtidos na eleição

Partido	Votos	(%) Votos
P1	400.000	40%
P2	100.000	10%
P3	250.000	25%
P4	250.000	25%
Total de votos	1.000.000	100%

Tabela 2.2 – População nacional

Distrito	População	(%) População
D1	300.000	30%
D2	250.000	25%
D3	150.000	15%
D4	200.000	20%
D5	100.000	10%
Total da população	1.000.000	100%

Considerando as tabelas 2.1 e 2.2, é trivial identificar a quantidade de assentos que deverá ser reservada para os partidos e os distritos. Os partidos, de P1 até P4, receberão respectivamente 8, 2, 5 e 5 assentos. Já os distritos, de D1 até D5, receberão 6, 5, 3, 4 e 2 assentos, nessa ordem. A alocação de assentos para distritos e partidos no exemplo acima, não gerou quantidades fracionárias de assentos, que é um dos grandes entraves para a solução da distribuição de assentos nos congressos.

Ao analisar o problema de forma mais profunda, é nítido perceber que a divisão proporcional de assentos em relação à população e ao desempenho partidário poderá resultar em valores não inteiros. A título de esclarecimento, essa alocação poderá gerar a distribuição de 14,5 assentos ao distrito X e/ou 20,7 assentos ao partido Y. Nesse caso, pode-se pensar em arredondar a quantidade de assentos para cima, obtendo-se assim 15 assentos para o distrito X e 21 assentos ao partido Y, ou arredondar a quantidade de assentos para baixo, resultando em 14 assentos para o distrito X e 20 assentos para o partido Y.

As duas abordagens descritas não resolvem o problema, sendo possível que sobrem ou faltem assentos com o uso das mesmas. Sendo assim, caso seja da vontade do Congresso de um determinado país o uso dessa metodologia para a solução do problema, este deve utilizar uma abordagem adicional para lidar com o novo problema gerado.

Caso fossem escolhidas as duas abordagens acima, simultaneamente para a resolução do problema, poderiam ser alocados todos os assentos disponíveis aos partidos, porém cidadãos de distritos eleitorais poderiam ter mais ou menos poder de voto em relação a eleitores de outros distritos. É o que ocorre no procedimento italiano de atribuição biproporcional, sendo destacado por Pennisi (2006) que, nas últimas cinco eleições nacionais (deve-se considerar o ano de autoria de seu trabalho), o problema descrito acima ocorreu em três delas.

Um fato real acontecido nas eleições políticas italianas de 2006 é dado por Pennisi et. al. (2008): o distrito de Trentino-Alto Adige obteve 11 assentos, em vez dos 10 concedidos pela Lei Constitucional, enquanto o distrito Molise teve dois assentos em vez de 3. Como consequência, em Trentino-Alto Adige, 85.426 votos eram necessários para obter uma cadeira, enquanto que em Molise era necessário 160.300 votos por vaga.

Pode-se verificar, a partir desses dados, que o poder de voto da cidade de Trentino-Alto Adige era quase o dobro do poder do eleitor de Molise. Akartunali e Knight (2013) destacam um caso ocorrido na Suíça, onde houve uma alteração na lei eleitoral local, após um eleitor descontente com o procedimento eleitoral de distribuição de assentos ter processado – com sucesso – seu país.

O arredondamento da quantidade de assentos – para cima ou para baixo - é uma das abordagens comumente usadas para resolver o problema da quantidade de assentos não-inteira (BALINSKI e DEMANGE, 1989). O capítulo seguinte do trabalho abordará em uma de suas seções, o sistema eleitoral italiano, que já se utilizou da abordagem descrita anteriormente para distribuição de assentos no Parlamento (PENNISI, 2006).

O objetivo do corrente trabalho será solucionar o problema em questão buscando a minimização dos erros na distribuição de assentos, que, em suma, consiste em minimizar o erro entre a quantidade que deveria ser alocada para aquele partido nos distritos e no cenário nacional e a quantidade que a abordagem utilizada obteve (PUKELSHEIM et. al., 2011). A modelagem proposta no presente trabalho objetiva exatamente essa minimização de erros.

Visto isso, a seguir será dada uma definição formal para o problema em questão. Nas seções seguintes, serão realizadas análises em relação às técnicas / métodos utilizadas(os) no sistema eleitoral de alguns países europeus para

descobrir como é ou já foi realizada a distribuição de assentos de cada um deles. Posteriormente, uma ênfase ao sistema eleitoral brasileiro será dada.

2.1. Definição formal para o problema

Uma definição formal para o problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares é dada a seguir (PUKELSHEIM et. al., 2011):

Conjuntos:

- M Conjunto de distritos;
- N Conjunto de partidos;

Variável de decisão:

- x_{ij} Quantidade de assentos alocados ao partido j no distrito i ;

Parâmetros:

- H Total de assentos de um parlamento;
- v_{ij} Número de votos que o partido j obteve no distrito i ;
- q_{ij} Número fracionário de assentos reservados para o partido j no distrito i ;
- c_j Número de assentos reservados para o partido j ;
- r_i Número de assentos reservados para o distrito i ;

Função Objetivo:

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in M, j \in N} |x_{ij} - q_{ij}|$$

Restrições:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = r_i, \quad \forall i \in M \quad (1)$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = c_j, \quad \forall j \in N \quad (2)$$

$$x_{ij} = 0, \quad \forall i \in M, \forall j \in N : v_{ij} = 0 \quad (3)$$

A função objetivo busca minimizar o erro total da alocação de assentos de cada distrito para cada partido. Esse erro é dado através da diferença entre a quantidade alocada de assentos para o partido j no distrito i e a quantidade fracionária que deveria ser alocada. A quantidade fracionária q_{ij} é definida como:

$$q_{ij} = r_i \times \frac{v_{ij}}{\sum_{j \in N} v_{ij}}$$

Em suma, q_{ij} representa a quantidade justa de assentos que deveria ser alocada para cada partido em determinado distrito. É multiplicado o número de assentos r_i reservados para cada distrito i pela divisão entre o número de votos que cada partido j recebeu e a quantidade total de votos que o distrito i obteve. Naturalmente, q_{ij} representará possivelmente um valor fracionário e é exatamente essa questão que torna o problema amplamente discutido e não trivial de ser resolvido.

A restrição (1) assegura que cada **distrito** receberá exatamente a quantidade reservada de assentos para ele. A restrição (2) garante que cada **partido** receberá exatamente a quantidade reservada de assentos para ele. A restrição (3) diz-se respeito a não alocação de assentos em um determinado distrito para um partido que não tenha recebido votos no local.

Nesse trabalho, assume-se que as duas etapas – repartição dos H assentos entre as regiões e entre os partidos – já foram realizadas, sabendo-se então previamente a quantidade de assentos r_i reservada para cada distrito i e a quantidade de assentos c_j reservada para cada partido j .

2.2. Sistema eleitoral italiano

A técnica usada para a alocação de assentos aos partidos italianos poderia produzir resultados errôneos, ao alocar mais ou menos assentos do que determinado partido tem direito a receber. É o que afirma Pennisi (2006), em seu trabalho intitulado “*The italian bug: A flawed procedure for bi-proportional seat allocation.*” O método de cálculo de assentos do parlamento italiano será estudado a seguir.

Segundo Pennisi (2006), o grande problema existente na distribuição de assentos entre os partidos italianos está na garantia de 54% do número total de assentos para o partido que recebeu mais votos nacionalmente, independentemente da diferença de votos entre o partido mais votado e o segundo mais votado e assim sucessivamente. O fato constatado impede que os princípios existentes na legislação italiana sejam cumpridos. Pennisi (2006) destaca também a discussão em torno dos resultados nacionais e os resultados regionais (por distrito): nesse sentido, o grande problema é que se os resultados nacionais prevalecerem sobre os resultados regionais ou vice-versa, partidos poderão ser beneficiados ou prejudicados. Sendo assim, a discussão é intensa entre partidos, cada qual reivindicando a prevalência do resultado – nacional ou regional – que será mais vantajoso para eles.

No sistema eleitoral italiano, o número de assentos destinados a cada uma das partes (distritos e partidos), caso seja fracionário, é arredondado para baixo. Sendo assim, a quantidade de assentos ainda não alocados é repassada para aqueles distritos e partidos que obtiveram uma maior parte fracionária.

2.3. Sistema eleitoral espanhol

O trabalho realizado por Ramírez et. al. (2008) denominado “*A bi-proportional method applied to the Spanish Congress*” aborda a técnica utilizada para determinação de assentos no Congresso Espanhol de 2004, considerando justa a alocação determinada. Os autores alertam para a distribuição errônea existente em

alguns parlamentos ao redor do mundo, quando se faz a alocação de assentos aos partidos separadamente em cada distrito.

Segundo Ramírez *et al.* (2008), pode acontecer que a proporção global de assentos de um partido se desvie significativamente da sua proporção global de votos, seja em proveito próprio ou de sua desvantagem. Esta proporção injusta de assentos é diretamente proporcional à existência de distritos eleitorais cuja quantidade de assentos destinada a eles é pequena.

O trabalho demonstra o uso de duas técnicas para a simulação da alocação de assentos nas eleições realizadas de 2004, e a técnica que de fato foi usada. O sistema usado implica em alocar assentos aos partidos de acordo com os distritos, sem considerar a quantidade de votos nacionalmente recebida por cada partido. Com isso, o parlamento ganha uma proporcionalidade justa em relação ao número de assentos destinados a cada partido em cada distrito, porém a proporcionalidade entre partidos torna-se injusta. Talvez esse seja o ponto-chave de até hoje o Problema da Alocação Biproporcional ser fortemente discutido em trabalhos acadêmicos, bem como em reuniões parlamentares. Os autores do trabalho enaltecem a dificuldade existente na solução do problema em questão, ao considerar os dois objetivos do problema – alocação proporcional aos distritos e aos partidos – conflitantes entre si.

2.4. Sistema eleitoral europeu

No Parlamento Europeu, diversas mudanças ocorreram ao longo do tempo devido ao crescimento no número de países-membros da União Européia. Porém, o que é constatado por Moberg (2008) em sua obra “*The voting System in the Council of the European Union. The balance Between Large and Small Countries*” é o fato que, as nações de economia mais forte participantes do parlamento têm direito a 75% de votos a mais do que teriam se fosse feita uma distribuição justa, proporcional ao total da população. Infelizmente, essa distribuição errônea de assentos está em todos os países. A influência política é **fator determinante** no cálculo da quantidade de assentos reservados.

Segundo Moberg (2008), a distribuição de assentos na União Europeia é feita com base na **maioria qualificada**, ou seja, o país mais populoso tem uma porcentagem fixa de assentos assegurados. O restante de assentos está dividido de forma proporcional para os demais países. Esse modelo de Sistema Eleitoral é semelhante ao italiano, já descrito em seção anterior, sendo que no modelo europeu são destinados 71% dos assentos para a maioria qualificada, ao passo que 54% dos assentos são destinados ao estado mais populoso da Itália.

O autor considera inviável tentar encontrar a formulação matemática que calcula a quantidade de assentos para cada país do Parlamento Europeu, visto as contradições existentes na distribuição. Moberg (2008) enfatiza essa distorção no seguinte exemplo: a Holanda, com aproximadamente 15 milhões de habitantes está no mesmo grupo da Grécia, Bélgica e Portugal com aproximadamente 10 milhões de habitantes, cada um com cinco votos. Outro grupo com a Suécia e a Áustria, apenas um pouco menor do que os últimos países com aproximadamente nove e oito milhões de habitantes, respectivamente, receberam um voto a menos.

O que se pode perceber é que o Sistema Eleitoral Europeu, embora seja idealizado na distribuição proporcional de assentos em relação à população de cada país, não a coloca em prática e o que prevalece é a influência política dos grandes países na determinação da alocação de assentos. Embora essa alocação não seja biproporcional, com a consideração da distribuição proporcional em relação aos partidos existentes, os países mais populosos podem ser vistos como partidos beneficiados com a técnica usada no Sistema Eleitoral, ao passo que os partidos prejudicados são os países menos populosos.

2.5. Sistema eleitoral brasileiro

Diferentemente dos sistemas eleitorais citados e descritos acima, o sistema eleitoral brasileiro é assim definido por Albuquerque (2013): a Câmara dos deputados é composta por 513 deputados federais. Esse número é dividido de uma maneira proporcional entre os 26 estados brasileiros e o Distrito Federal. As contas são baseadas em dados populacionais do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).

A peculiaridade em relação aos sistemas europeus está em alocar os assentos de forma proporcional apenas aos distritos, **não** considerando os partidos. Ainda segundo Albuquerque (2013), o sistema é falho, ao estabelecer um limite mínimo e máximo de assentos para todos os estados da nação, ocasionando assim uma maior representatividade dos estados menos populosos em relação aos mais populosos.

Uma das ideias iniciais do presente trabalho era o estudo do sistema eleitoral brasileiro, a fim de desenvolver técnicas / métodos para a distribuição dos assentos brasileiros e confrontar a matriz resultante com o cenário atual de alocação brasileiro. Porém, visto a peculiaridade existente no parlamento brasileiro descrita acima, não foi possível dar prosseguimento na ideia, já que o foco do trabalho é a **Alocação Biproporcional** de Assentos.

A título de conhecimento, foi aprovada recentemente uma mudança na alocação de cadeiras da Câmara dos Deputados, que passa a valer já para as próximas eleições (2014). É o que diz a Assessoria de Imprensa e Comunicação Social, sendo que essa redefinição foi feita com base no Censo 2010 e afeta 13 estados, com um maior impacto nos estados do Pará, Paraíba e Piauí, sendo que o primeiro ganha quatro cadeiras e os demais perdem duas cadeiras.

A técnica utilizada no Sistema Eleitoral Brasileiro arredondou para cima o número de assentos de um respectivo estado que teve a divisão proporcional resultante em uma parte fracionária maior que meio. No outro caso – parte fracionária menor ou igual a meio, o arredondamento foi feito para baixo. Ao empregar essa técnica, segundo a ministra Nancy Andrighi, sobraram 17 cadeiras no Parlamento Brasileiro, de um total de 513. As cadeiras restantes serão alocadas aos estados que obtiveram mais que 8 cadeiras (limite inferior) e menos que 70 cadeiras (limite superior) nos cálculos realizados.

3. Modelagem e Métodos de Fluxo em Redes

O capítulo a seguir demonstrará como é possível modelar o Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares como um Problema do Fluxo de Custo Mínimo em Redes. Vale ponderar aqui que essa modelagem deve respeitar as restrições já definidas anteriormente. Primeiramente, o PFCM será descrito, bem como os métodos que serão utilizados para a resolução do problema. Posteriormente, os detalhes acerca de como foi possível a redução do PABAP para o PFCM serão apresentados.

3.1. Problema do Fluxo de Custo Mínimo (PFCM)

O objetivo do Problema do Fluxo de Custo Mínimo é dado a seguir por Feofiloff (2004): Dada uma rede (N, A, u, b, c) com função-capacidade u , função-demanda b e função-custo c , objetiva-se encontrar um fluxo viável de custo mínimo que satisfaça b e respeite u . Em suma, todas as demandas devem ser atendidas, respeitando os limites de capacidade a um mínimo custo. Camponogara (2006) descreve os dados necessários para um problema e sua formulação matemática:

- . Um grafo direcionado $G = (V, A)$ consistindo em um conjunto de vértices (ou nós) e um conjunto de arcos;
- . O custo unitário c_{ij} de transporte através do arco (i, j) ;
- . O limite inferior l_{ij} e superior u_{ij} para fluxo através do arco (i, j) ;
- . A quantidade de fluxo b_i que deve ser injetada ou consumida pelo nó i ; se $b_i > 0$, então i é um nó fornecedor; se $b_i < 0$, então i é um nó consumidor; e se $b_i = 0$, então i é um nó de transporte.

$$\text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} * x_{ij}$$

Sujeito à:

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A\}} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in V \quad (1)$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in V \quad (2)$$

A função objetivo busca minimizar o custo total da rede, através do somatório da multiplicação do custo unitário de fluxo de cada aresta (i, j) pela quantidade de fluxo existente na respectiva aresta. A restrição (1) está associada a satisfazer a demanda ou oferta de cada nó e a restrição (2) assegura que o fluxo em cada arco (i, j) estará compreendido entre os valores l_{ij} e u_{ij} do arco.

Segundo Nogueira (2013), algumas considerações devem ser feitas em relação a esse problema. Em síntese, a rede deve ser orientada e conectada, com ao menos um nó de oferta e um nó de demanda. Além disso, os arcos devem ter capacidade suficiente para suprir o fluxo possível. Por fim, o custo do fluxo através de cada arco é proporcional à quantidade daquele fluxo, sendo conhecido o custo por unidade de fluxo em todas as arestas (arcos). O objetivo do problema pode ser a minimização de custos ou a maximização de lucros, dependendo do contexto e satisfazendo as restrições de demanda.

Existe uma grande variedade de aplicações que podem ser consideradas como Problemas do Fluxo de Custo Mínimo. Nogueira (2013) considera o Problema de Transporte, de Designação, de Caminho mais Curto e de Fluxo Máximo como casos especiais do PFCM. O problema em questão é importante, por exemplo, para empresas que querem minimizar o custo envolvido no transporte de bens a partir das fontes (fábricas) para locais de armazenagem intermediárias e então, para os clientes (demanda).

Lemes e Silva (2006) citam quatro algoritmos básicos para a resolução do PFCM. Uma breve descrição de cada um deles será dada a seguir, sendo três deles mais detalhados na próxima seção.

A ideia do **algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos** é usar o caminho mínimo para encontrar ciclos aumentantes com custo negativo (ciclo negativo), aumentando o fluxo nesse ciclo. O algoritmo se encerra quando não são encontrados ciclos negativos na rede residual.

No algoritmo de **Sucessivos Caminhos Mínimos**, é construído um caminho mínimo – de um nó origem para um nó destino - e então enviado fluxo factível nesse caminho. A cada iteração do algoritmo é construído um novo caminho mínimo e o algoritmo se encerra quando não é mais possível levar fluxo do nó origem para o nó destino.

Os algoritmos **Primal-Dual** e **Out-of-Kilter** têm como estratégia usar um algoritmo qualquer de fluxo máximo para aumentar o fluxo simultaneamente em vários caminhos mínimos. A diferença entre eles é que o último permite a violação da capacidade dos arcos em um dado momento.

É válido ressaltar que todos os algoritmos citados acima e brevemente descritos são dependentes de outros problemas para serem resolvidos. É o que diz Feofiloff (2004), quando da solução do PMFC é dependente do problema do Caminho Mínimo, do Ciclo Negativo e do Fluxo Máximo. Portanto, é coerente o breve estudo de cada um deles antes de cada um dos algoritmos serem descritos.

O problema do Caminho Mínimo é assim definido por Simão e Hashimoto (2013): Seja G uma rede com custo c e seja P um caminho entre os vértices i e j em G . Dizemos que P é um caminho de custo mínimo entre i e j se não existe outro caminho entre i e j com custo menor do que o custo no caminho P . Para maiores detalhes, consulte Simão e Hashimoto (2013) e Ahuja, Magnanti e Orlin (1993).

Antes da descrição do Problema do Fluxo Máximo, é imprescindível o entendimento do conceito de rede residual, usada para detectar ciclos negativos numa dada rede. Ao se alocar um fluxo qualquer em algum caminho da rede, a capacidade dos arcos utilizados no caminho é modificada. Sendo assim, a capacidade “residual” é dada pela diferença entre a capacidade real do arco e o fluxo corrente no arco (CAMPOS, 2007).

A rede residual é composta pelos arcos que ainda admitem uma quantidade de fluxo. Em síntese, suponha uma aresta (i, j) , que liga os nós i e j , com capacidade de enviar quatro unidades de fluxo e um custo negativo -2. A rede residual gerada, após o fluxo de três unidades nessa aresta, possui a aresta (i, j) com capacidade de uma unidade de fluxo. É criada a aresta (j, i) , com a capacidade de 3 unidades, igual ao fluxo enviado pela aresta (i, j) e custo inverso.

Já no Problema do Fluxo Máximo, o objetivo é enviar a maior quantidade de material (fluxo) possível em uma rede, sem sobrecarregá-la (BRANDÃO, 2013). Uma

consideração feita aqui é que a rede deve ser composta de no mínimo um caminho entre o nó origem e o nó destino. Além disso, os caminhos existentes na rede devem ter capacidade maior que zero.

Uma ressalva feita diz respeito à lei de Conservação de Fluxo. Em linhas gerais, não deve haver acúmulo de fluxo em nós intermediários da rede. Maiores informações sobre o Problema do Fluxo Máximo em Brandão (2013) e em Ahuja, Magnanti e Orlin (1993).

Basicamente, os algoritmos descritos na próxima seção trabalham com a geração de um fluxo inicial qualquer na rede, a obtenção do caminho mínimo sobre a rede residual do problema, objetivando encontrar o fluxo máximo de custo mínimo na rede, respeitando as restrições associadas ao problema. As particularidades existentes entre os métodos serão descritas.

3.2. Métodos utilizados

Foram usados quatro algoritmos para a resolução do Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares, no contexto de um Problema do Fluxo de Custo Mínimo. São eles: Algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos, Algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos, Algoritmo Primal-Dual e um modelo de programação inteira.

Os quatro métodos serão descritos abaixo. No Capítulo 4, os algoritmos serão comparados em termos de eficiência através da resolução de algumas instâncias encontradas na literatura voltadas para o Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares e para problemas genéricos de Fluxo em Redes.

3.2.1. Programação inteira

Foi usado um modelo de Programação inteira para a resolução do Problema do Fluxo de Custo Mínimo. Foi usado a linguagem AMPL (*A Modeling Language for Mathematical Programming*) para implementação, que emprega uma notação muito semelhante à programação matemática, tipicamente utilizada para descrever problemas de otimização (CAMPONOGARA, 2006).

Uma das grandes vantagens nesse tipo de linguagem é a separação do modelo propriamente dito dos dados, particular de cada instância de determinada classe de problemas. Em síntese, a modelagem matemática do problema é independente das instâncias que serão usadas.

Para maiores informações acerca da linguagem, consulte o endereço <http://www.ampl.com>. A definição da linguagem, extraída do endereço anterior, é dada: AMPL é uma linguagem completa e poderosa de modelagem algébrica para problemas de otimização linear e não-linear, em variáveis discretas ou contínuas.

3.2.2. Algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos

O algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos, proposto por Klein (1967), foi um dos primeiros algoritmos desenvolvidos para resolver o problema do Fluxo de Custo Mínimo. Segundo Sokkalingam, Ahuja e Orlin (1997), este algoritmo mantém uma solução viável em cada iteração. Ele prossegue, identificando ciclos direcionados de custo negativo na rede residual e aumentando o fluxo tanto quanto possível no ciclo, anulando-lhes. O algoritmo termina quando a rede residual não contém ciclo direcionado de custo negativo.

O pseudocódigo do algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos é apresentado na Figura 3.2:

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Obtenha um fluxo viável 2. Enquanto $G(x)$ contém um circuito negativo faça 3. Utilize um algoritmo para encontrar um circuito negativo w 4. $\delta = \min\{r_{ij} : (i, j) \in w\}$ 5. Aumente o fluxo ao longo do circuito w de δ unidades e atualize $G(x)$ 6. Fim-Enquanto |
|--|

Figura 3.2 – Algoritmo de Cancelamento de Ciclos negativos (CAMPONOGARA, 2006)

No passo 1, foi usado um algoritmo para encontrar um fluxo factível inicial. Algoritmo de Edmonds-Karp é um exemplo de algoritmo que encontra um fluxo factível inicial e foi usado na implementação. Para maiores detalhes do algoritmo, consulte Junior (2010) e Campos (2007). Gerado esse fluxo inicial, o algoritmo entra

em um laço (passo 2 – 6). O laço itera até que não sejam encontrados mais ciclos na rede residual $G(x)$.

A detecção de ciclos é feita por outro algoritmo (passo 3), sendo usado o Algoritmo de Bellman-Ford para tal propósito. Para mais informações acerca do método, consulte Ford e Fulkerson (1962) e Bellman (1958). Uma ponderação a ser feita aqui é que a execução desse algoritmo deve ser feita sobre a rede residual do problema.

No passo 3, o algoritmo deve encontrar algum circuito negativo na rede. Lembrando que esse algoritmo pode encontrar vários ciclos negativos, ficando a critério do programador escolher qual a abordagem será utilizada na escolha do ciclo. A implementação do algoritmo nesse trabalho escolheu o ciclo negativo de maior custo.

Feito isso, o passo 4 fica encarregado de percorrer o ciclo encontrado, localizando a menor capacidade dentre as capacidades das arestas. Isso é extremamente necessário para que o aumento de fluxo no circuito (ciclo) não viole a capacidade dos arcos (arestas).

Encontrada a menor capacidade do ciclo, essa se torna a quantidade de fluxo que será aumentada no circuito negativo (passo 5). É trivial atualizar a rede original, já que o fluxo foi alterado. Posteriormente, é verificada novamente a rede em busca de ciclos negativos (passo 2). O algoritmo se encerra quando não existem ciclos negativos na rede.

Um exemplo de execução do algoritmo é mostrado nas figuras 3.3 a 3.10, adaptado de Camponogara (2006).

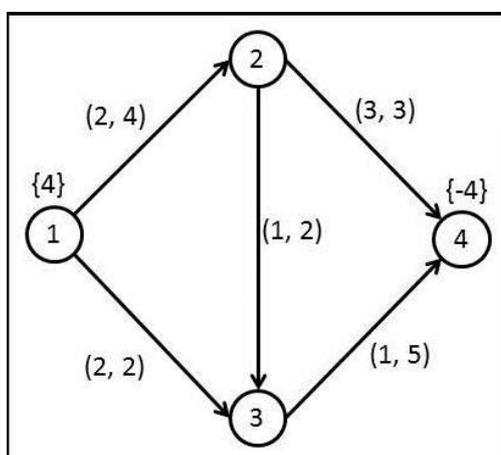


Figura 3.3 – Rede inicial

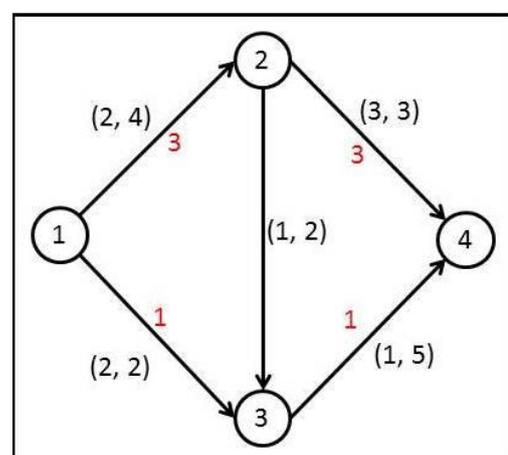


Figura 3.4 – Passo 1: Obtenção do fluxo inicial

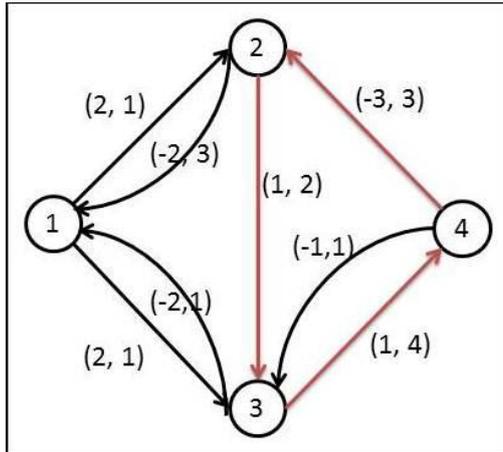


Figura 3.5 – Rede residual da 1ª iteração

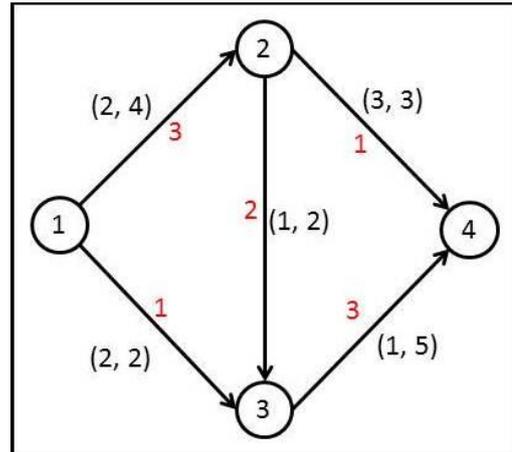


Figura 3.6 – Rede após 1ª iteração

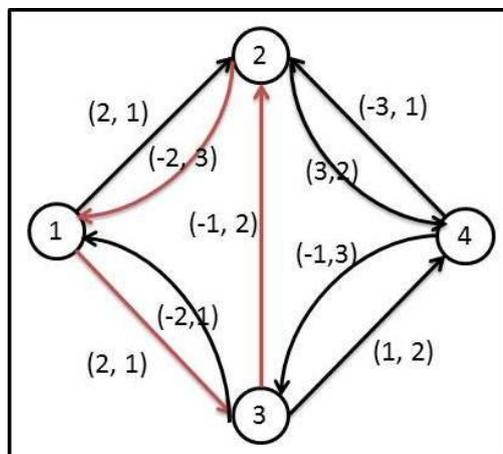


Figura 3.7 – Rede residual da 2ª iteração

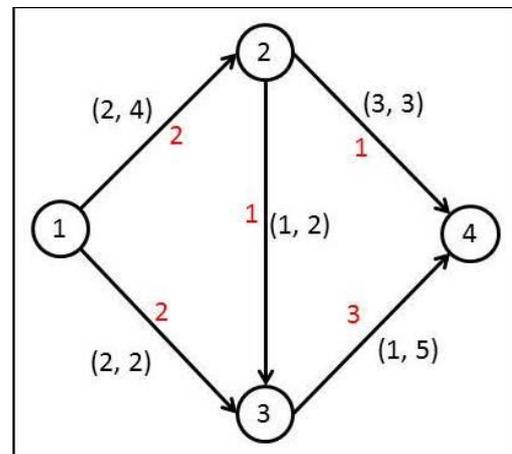


Figura 3.8 – Rede após 2ª iteração

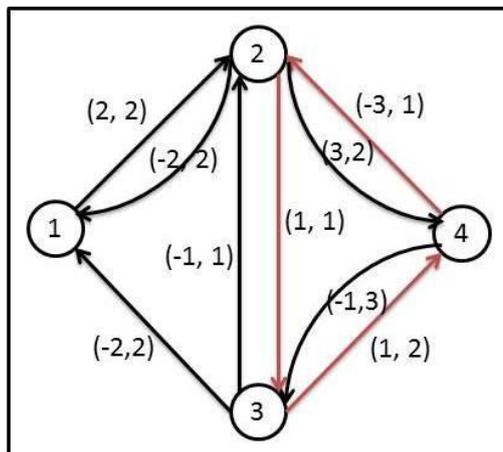


Figura 3.9 – Rede residual da 3ª iteração

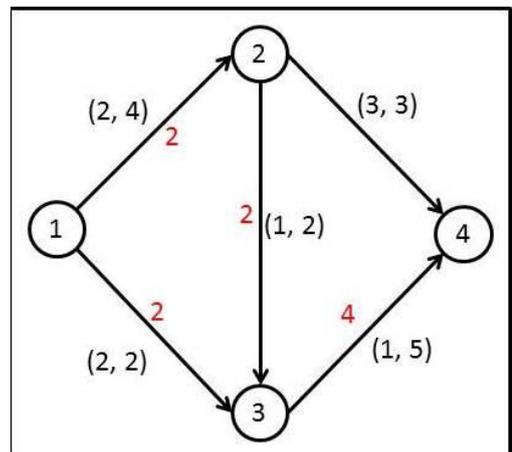


Figura 3.10 – Rede com fluxo ótimo

A Figura 3.3 representa a rede do exemplo, considerando que, os valores entre parênteses representam o custo e a capacidade de cada arco respectivamente. Valores entre chaves correspondem à oferta do nó super-oferta e à demanda do nó super-demanda.

Na Figura 3.4, é executado o passo (1) do algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos através do algoritmo de Edmonds-Karp. A Figura 3.5 apresenta a rede residual do problema, a qual será usada na execução dos próximos passos do algoritmo.

O passo 3 é realizado através do algoritmo de Bellman-Ford que encontra o ciclo negativo em destaque na Figura 3.5. O ciclo é dado por $((4, 2), (2, 3), (3, 4))$, com custo de -1. A execução do algoritmo de Bellman-Ford encontra outro ciclo negativo $((1, 3), (3, 4), (4, 2), (2, 1))$ com custo de -2. Porém, a implementação utilizada nesse trabalho escolhe sempre o circuito de maior custo.

Na mesma Figura 3.5, o passo 4 é realizado, ao verificar que a capacidade máxima do circuito é de 2. O passo 5 é demonstrado na Figura 3.6 e então a primeira iteração do algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos foi executada. As figuras 3.7 – 3.10 consistem em mais duas iterações do algoritmo, encontrando assim a solução ótima para o problema.

3.2.3. Algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos

Diferentemente do algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos, onde a cada iteração era obtida uma solução factível até alcançar a otimalidade, no algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos (SCM), a ideia é contrária, sendo garantida a otimalidade a cada passo (violando a restrição de Equilíbrio de Fluxo), até alcançar a factibilidade.

No algoritmo em questão, proposto por Jewell (1958), a ideia é escolher a cada momento um caminho de aumento de custo mínimo. O Caminho Mínimo é definido pelo custo da aresta. Segundo Rossetti et. al. (2011), o algoritmo se encerra quando se atinge o fluxo pretendido na rede ou quando não há mais caminhos de aumento. Nesses dois casos, é garantido o Fluxo Máximo de Custo Mínimo na rede.

Um pseudocódigo é apresentado na Figura 3.11:

1. $X := 0; \pi := 0;$
2. $e(i) := b(i)$ para todo $i \in N;$
3. $E := \{i : e(i) > 0\}; D := \{i : e(i) < 0\};$
4. Enquanto $E \neq \emptyset$ faça
5. Selecione um nó $k \in E$ e um nó $l \in D;$
6. Determine o vetor distâncias mínimas $d(j)$ do nó k para todos os demais nós na rede $G(x)$, em relação ao custo reduzido $c^\pi;$
7. Seja P o caminho mínimo que vai do nó k ao nó $l;$
8. $\delta := \text{Min}[e(k), -e(l), \min\{r_{ij} : (i, j) \in P\};$
9. Aumente δ unidades de fluxo ao longo do caminho $P;$
10. $\pi := \pi - d;$
11. Atualize $X, G(X), E, D$ e $c^\pi;$
12. Fim-Enquanto

Figura 3.11 – Algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos (SILVA, 2013)

Basicamente, o algoritmo separa em dois conjuntos os nós de uma dada rede. O conjunto E representa os nós de oferta, enquanto o conjunto D é representado pelos nós de demanda. Feito isso, o algoritmo entra em um laço, até que o conjunto E fique vazio, e então a solução ótima é encontrada.

Dentro do *loop*, é escolhido um nó k do conjunto E – nós de oferta –, e um nó l do conjunto D (passo 5). Os passo 6 e 7 representam a execução de um algoritmo auxiliar de Caminho Mínimo, que encontrará o menor custo possível entre os dois nós escolhidos no passo 5. Vale ressaltar aqui que o cálculo de custo mínimo é feito sobre o **custo reduzido** de cada aresta. Os custos reduzidos são zero para todos os arcos (i, j) no caminho mínimo do nó k para todos os demais nós da rede (Silva, 2013).

O passo 8 verifica qual será o aumento de fluxo máximo viável no caminho mínimo P encontrado. Para isso, o menor valor entre a oferta do nó k , a demanda do nó l e a capacidade das arestas pertencentes ao caminho mínimo é atribuído à variável δ . É aumentado o fluxo ao longo do caminho P em δ unidades (passo 9). O passo 10 subtrai o custo reduzido em relação ao custo da construção do caminho mínimo P . Por fim, o último passo do algoritmo é atualizar a rede $G(X)$, o conjunto dos nós de oferta, o conjunto dos nós de demanda e o custo reduzido de cada aresta da rede.

Um exemplo de execução do algoritmo é mostrado nas figuras 3.12 a 3.15.

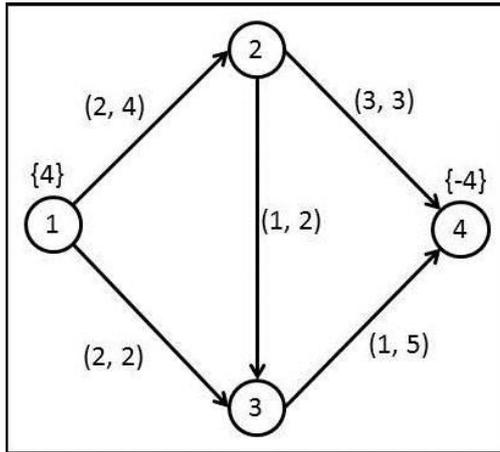


Figura 3.12 – Rede inicial (SCM)

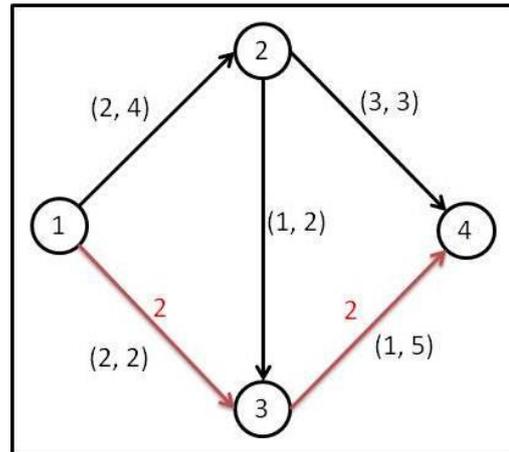


Figura 3.13 – Caminho mínimo na 1ª iteração

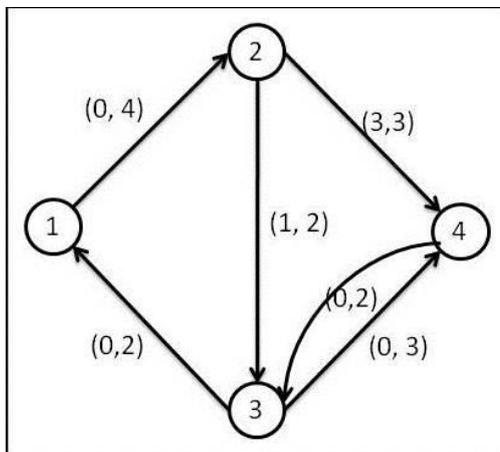


Figura 3.14 – Rede residual (SCM)

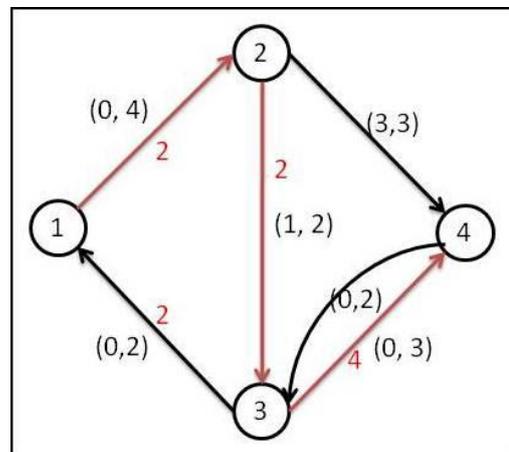


Figura 3.15 – Caminho mínimo na 2ª iteração

A Figura 3.12 ilustra a rede inicial do algoritmo SCM. Já na Figura 3.13, os arcos em destaque ((1, 3), (3, 4)) constituem o caminho mínimo encontrado entre o nó origem (1) e o nó destino (4), com custo igual a 3 e capacidade máxima de duas unidades de fluxo, que já foram distribuídas ao longo do caminho.

A 1ª iteração do algoritmo se encerra e então é verificado se há fluxo ainda para ser enviado do nó origem para o nó destino. Como ainda existem duas unidades de fluxo, o algoritmo continua sua execução. A Figura 3.14 ilustra a rede residual gerada pelo fluxo. Deve-se destacar que na construção da rede residual, foi aplicado o **custo reduzido**, já explicado anteriormente.

Na Figura 3.15, é encontrado o caminho mínimo através das arestas em destaque ((1, 2), (2, 3), (3, 4)), com custo igual a 1 e capacidade máxima de duas unidades de fluxo, que foram distribuídas ao longo do caminho. A 2ª iteração do

SCM é encerrada e **não há fluxo** para ser enviado do nó origem ao nó destino. Visto isso, o algoritmo é encerrado e a solução ótima foi encontrada.

3.2.4 Algoritmo Primal-Dual

O algoritmo Primal-Dual, proposto por Ford e Fulkerson (1962), é semelhante ao algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos. No algoritmo SCM, era enviado o fluxo máximo em um caminho mínimo de cada vez, ao passo que no algoritmo a seguir, o fluxo é enviado a todos os caminhos mais curtos (AHUJA, MAGNANTI e ORLIN, 1993).

Para que isso seja possível, a rede em consideração deve possuir apenas um nó de excesso e um nó de déficit (HOSHINO e PEDROTTI, 2007). Caso a rede não tenha essa característica, podem-se adicionar dois nós artificiais, denominados nó de origem e nó sorvedouro. O nó origem receberá todo o excesso existente na rede, enquanto o nó sorvedouro receberá todo o déficit existente na rede. Como são nós adicionais à rede, não pertencentes ao problema, o custo de todas as arestas conectadas a eles é nulo.

Existirá uma aresta do nó origem para cada nó inicialmente com excesso, enquanto, de forma similar, cada nó de déficit da rede original terá uma aresta conectada ao nó sorvedouro. A capacidade dessas arestas será **exatamente** o valor do excesso / déficit de cada nó, considerando a rede inicial do problema, antes da adição dos nós artificiais.

Maiores detalhes sobre o algoritmo Primal-Dual podem ser encontrados em Ford e Fulkerson (1962) e Ahuja, Magnanti e Orlin (1993). O pseudocódigo do algoritmo é descrito na Figura 3.16:

1. $X := 0; \pi := 0;$
2. $e(s) := b(s); e(t) := b(t);$
3. Enquanto $e(s) > 0$ faça
4. Determine o vetor distâncias mínimas $d(j)$ do nó s para todos os demais nós na rede $G(x)$, em relação ao custo reduzido c^π ;
5. Defina a rede admissível $G^\theta(X)$;
6. Encontre e envie o fluxo máximo de s para t em $G^\theta(X)$;
7. $\pi := \pi - d$;
8. Atualize $e(s)$, $e(t)$, $G(X)$ e c^π ;
9. Fim-Enquanto

Figura 3.16 – Algoritmo Primal-Dual (SILVA, 2013)

Em suma, a execução do algoritmo é bem semelhante à execução do Algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos, com as seguintes diferenças: não se tem a noção mais de conjuntos de nós de excesso e conjuntos de nós de déficit. No algoritmo Primal-Dual, há apenas um nó de excesso e um nó de déficit.

Um conceito novo que aparece no pseudocódigo é a respeito da definição da **rede admissível**. Rede admissível é um subgrafo da rede residual, em que apenas as arestas com custo reduzido de zero são consideradas.

Devido à similaridade entre o Algoritmo Primal-Dual e o Algoritmo SCM, não será dado um exemplo de execução do primeiro. As particularidades entre ambos já foram descritas.

3.3. Redução do PABAP para o Problema do Fluxo de Custo Mínimo

A ideia da modelagem consiste em atribuir inicialmente a quantidade total de assentos de um Congresso a um único nó (super-oferta). O nó em questão ficará responsável por distribuir os assentos para os nós que representam os distritos. Essa alocação deverá respeitar a quantidade pré-determinada de assentos reservadas para cada distrito. Por sua vez, cada nó pertencente ao conjunto de distritos deverá distribuir os assentos - recebidos do nó super-oferta – aos nós pertencentes ao conjunto de partidos, proporcionalmente ao número de votos recebidos. Por fim, há um nó (super-demanda) que receberá todos os assentos do

conjunto de nós de distrito, garantindo que a quantidade total de assentos disponibilizados pelo Congresso seja alocada entre partidos e distritos.

O nó super-oferta e o nó super-destino são nós adicionais a rede, denominados nós artificiais. Sendo assim, o custo atribuído a cada aresta conectada a esses nós será zero. Para as capacidades dessas arestas foram-se atribuído o valor da oferta / demanda do nó intermediário ao qual a respectiva aresta está sendo conectada, ao passo que o limite inferior é sempre zero.

Os valores dos custos, capacidades e limites inferiores das arestas intermediárias serão explicados posteriormente, através da definição formal e de um exemplo.

As seguintes denominações serão usadas para o modelo: a rede será representada por R , cada distrito i será representado por um nó d_i , enquanto que cada partido j será representado por um nó p_j .

O exemplo a seguir ilustra como é realizada a modelagem em redes para o problema. Devem ser distribuídos 10 assentos, em um sistema eleitoral constituído de quatro distritos e quatro partidos. O resultado das eleições é apresentado a seguir na matriz v_{ij} :

$$v_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 30 & 50 & 20 \\ 10 & 20 & 30 & 10 \\ 50 & 10 & 10 & 60 \\ 20 & 40 & 20 & 40 \end{vmatrix}$$

A quantidade reservada de assentos para cada distrito e para cada partido é denotada por r_i e c_j respectivamente. Os vetores são apresentados a seguir:

$$r_i = [2 \quad 2 \quad 3 \quad 3]$$

$$c_j = [2 \quad 2 \quad 3 \quad 3]$$

Com os dados disponíveis nas tabelas acima, já é possível saber o limite inferior e a capacidade das arestas que conectam os nós intermediários da rede.

Primeiramente, é coerente ressaltar que a alocação proporcional das vagas parlamentares geralmente implica em valores não inteiros de vagas para partidos em distritos. O arredondamento desses valores não é trivial de se realizar, uma vez que pode influenciar fortemente na representatividade de cada partido em cada distrito. Logo, cada arco (d_i, p_j) que liga o nó d_i ao nó p_j possui seu limite inferior de fluxo (l_{ij}) e sua capacidade (u_{ij}) calculados da seguinte forma:

$$l_{ij} = \left\lfloor \frac{v_{ij}}{\sum_{j \in N} v_{ij}} \right\rfloor, \forall i \in M$$

$$u_{ij} = \left\lceil \frac{v_{ij}}{\sum_{j \in N} v_{ij}} \right\rceil, \forall i \in M$$

Onde $\lfloor \cdot \rfloor$ representa o piso de qualquer número decimal e $\lceil \cdot \rceil$ representa o teto de qualquer número decimal. Dessa forma, garante-se a alocação proporcional à matriz de votos. O modelo de fluxo com custo mínimo em redes tem agora a decisão de arredondar cada arco (d_i, p_j) para seu limite inferior ou superior.

As decisões sobre o arredondamento dos arcos serão feitas baseada no custo de cada um deles. Na presente modelagem, o custo (c_{ij}) de cada arco (d_i, p_j) será modelado como:

$$c_{ij} = \left\lfloor \frac{v_{ij}}{\sum_{j \in N} v_{ij}} \right\rfloor \times \frac{\sum_{j \in N} v_{ij}}{H} - v_{ij}, \forall i \in M$$

A seguinte matriz q_{ij} apresenta a quantidade fracionária de assentos que cada partido p_j deveria receber em cada distrito d_i :

$$q_{ij} = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,71 & 1,19 & 0,48 \\ 0,24 & 0,48 & 0,71 & 0,24 \\ 1,19 & 0,24 & 0,24 & 1,43 \\ 0,48 & 0,95 & 0,48 & 0,95 \end{bmatrix}$$

Note que $\sum_{i \in M, j \in N} c_{ij} = H$. Cada valor em q_{ij} pode ser arredondado para baixo ou para cima. Tal arredondamento comporá o limite inferior e superior de fluxo da rede. O custo de cada arco que liga d_i a p_j é representado na matriz c_{ij} . Note que os valores exibidos na matriz c_{ij} são todos negativos. Tais valores representam o restante de votos recebidos de cada partido p_j em cada distrito d_i multiplicado pelo valor -1. Assume-se que a quantia inteira de assentos da matriz proporcional de votos já foi alocada.

$$c_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & -30 & -8 & -20 \\ -10 & -20 & -30 & -10 \\ -8 & -10 & -10 & -18 \\ -20 & -40 & -20 & -40 \end{vmatrix}$$

Os valores entre chaves mostrados na rede R representam a oferta ou demanda de cada nó. Note que apenas os nós s e t possuem esses valores, já que todo o fluxo que sai do nó s deve chegar ao nó t . Os valores apresentados entre parênteses denotam respectivamente o custo, o limite inferior e a capacidade dos arcos (arestas).

É válido ressaltar aqui que o objetivo da modelagem é a construção de uma matriz referente a alocação de assentos aos partidos em cada distrito, que respeite as restrições existentes no dado problema. A rede R é apresentada na Figura 3.1.

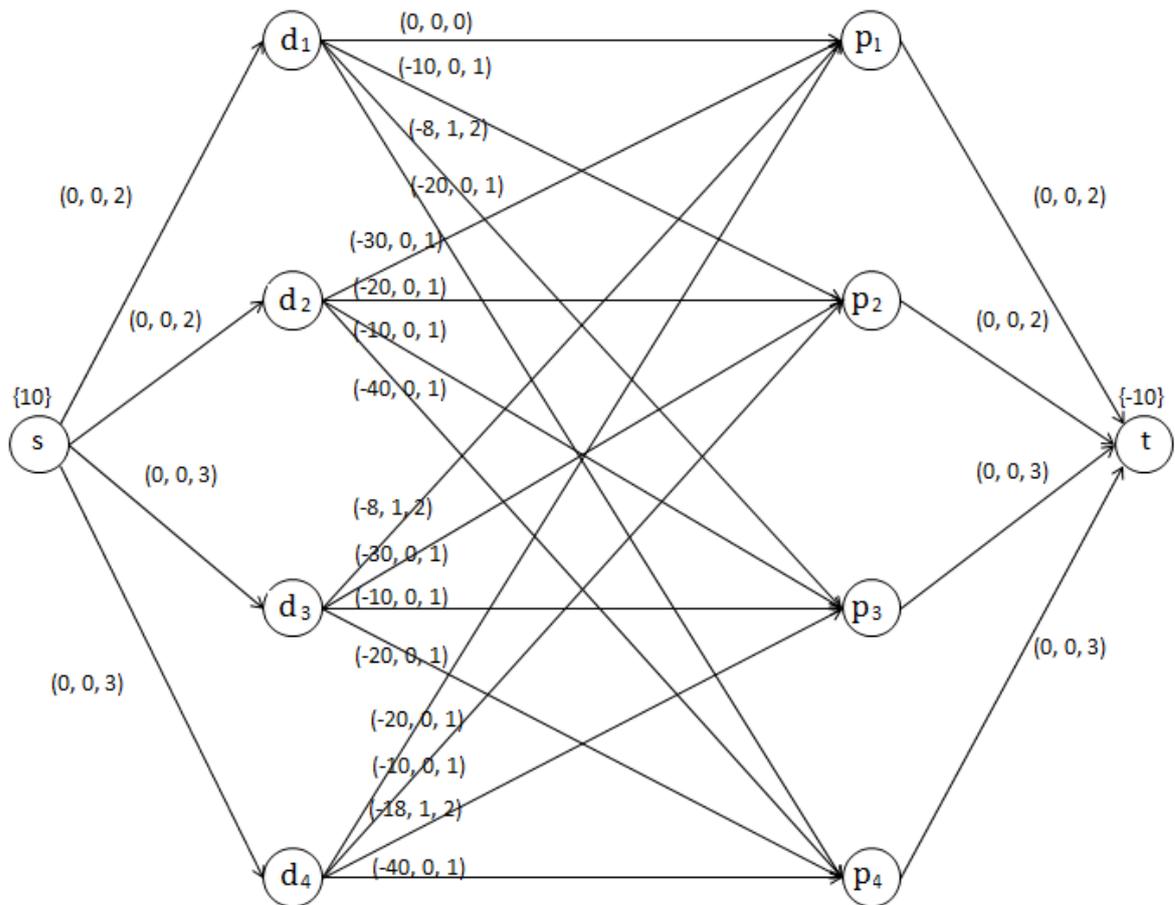


Figura 3.1 – Rede R para o Problema da Alocação Biproportional de Assentos Parlamentares

4. Experimentos Computacionais

Para avaliar os algoritmos implementados no trabalho, foram usadas duas categorias de instâncias. Uma das categorias está relacionada ao Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares (AUGSBURG, 2013). A outra categoria representa instâncias genéricas para o Problema do Fluxo de Custo Mínimo (KLINGMAN, NAPIER e STUTZ, 1974).

A implementação do Algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos, Algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos, Algoritmo Primal-Dual e do modelo de programação inteira, que foram usados na resolução das instâncias do problema, estão disponibilizadas no endereço <https://sites.google.com/site/queedesmatheus/monografia>. As instâncias, no formato DIMACS e DAT, também podem ser encontradas no endereço.

A linguagem de programação utilizada para o desenvolvimento dos algoritmos foi Java e a linguagem AMPL foi usada para o modelo de programação inteira. Foi estabelecido como critério de parada, de forma empírica, o tempo máximo de 1 hora (3.600 segundos) para a execução de cada um dos algoritmos para cada uma das instâncias.

Todos os testes foram realizados em um computador com as seguintes características: processador Pentium (R) Dual-Core 2.2 GHz com 2GB de Memória RAM, no sistema operacional Windows 7 Starter.

Na próxima seção, serão apresentados os resultados obtidos com o uso dos quatro métodos implementados para a resolução das instâncias da classe do PABAP. Na seção seguinte, os resultados obtidos para a resolução das instâncias da classe do Problema do Fluxo de Custo Mínimo serão mostrados. Na seção 4.3, serão comparados o desempenho de cada um dos algoritmos para as duas classes de instâncias.

4.1. Instâncias para o Problema da Alocação Biproporcional

As instâncias para o PABAP foram obtidas através do software Bazi (AUGSBURG, 2013), conhecido software de apresentação de dados eleitorais. A nomenclatura dada na tabelas 4.1 a 4.3 para cada instância, está caracterizada pelos 4 primeiros caracteres sendo o local de votação e os 2 últimos caracteres o ano de votação da respectiva instância.

A Tabela 4.1 apresenta as características de cada uma das instâncias, apresentando a quantidade de assentos (cadeiras), distritos, partidos e o total de votos.

Tabela 4.1 – Características das instâncias do PABAP

Instância	Nº de assentos	Nº de distritos	Nº de partidos	Nº de votos
Belg99	24	2	6	1.012.480
Farl04	32	7	6	24.868
Farl78	32	7	6	22.724
Swit06	125	9	7	640.200
Schw09	140	11	14	1.827.914
Swit07	180	18	8	2.124.845
Swed10	349	29	8	5.875.385

A tabela 4.2 é apresentada a seguir, onde:

Tabela 4.2 – Resultados obtidos para as instâncias do PABAP

Instância	Nº de assentos	Custo	Erro (%)
Belg99	24	3,93	16%
Farl04	32	9,56	30%
Farl78	32	13,85	43%
Swit06	125	18,62	15%
Schw09	140	26,75	19%
Swit07	180	39,44	22%
Swed10	349	72,55	21%

Nº de assentos: Quantidade de assentos (cadeiras) disponíveis em cada instância.

Custo: Somatório da diferença entre a quantidade fracionária de assentos (cadeiras) que deveria ser alocada para cada partido em cada distrito e a quantidade inteira que a modelagem realizada no presente trabalho alocou.

Erro (%): Divisão do **Custo** pelo **Nº de assentos**. Representa a porcentagem de assentos de cada instância que foi alocada de maneira errada pela modelagem proposta no trabalho.

A título de curiosidade, a Tabela 4.3 é representada pelas seguintes informações, onde:

Tabela 4.3 – Maior e Menor Representatividade das instâncias do PABAP

Instância	Votos/Assento	Maior Rep.	Menor Rep.
Belg99	42.187	22.074	65.705
Farl04	778	275	1.031
Farl78	711	48	1.753
Swit06	5.122	1.029	10.508
Schw09	13.057	1.317	30.882
Swit07	11.805	444	24.819
Swed10	16.835	5.340	26.829

Votos/Assento: Representa a divisão do número de votos obtidos na eleição de cada instância pelo número de assentos disponíveis.

Maior Rep.: Representa o menor número de votos que foi necessário para determinado partido garantir um assento.

Menor Rep.: Representa o maior número de votos que foi necessário para determinado partido garantir um assento.

Os quatro métodos implementados, descritos no capítulo anterior, foram utilizados para a resolução das instâncias do PABAP. Em todas as execuções, a solução ótima foi alcançada em um tempo inferior a 2 segundos, impossibilitando qualquer comparação entre a eficiência de cada um dos métodos utilizados na resolução do problema.

4.2. Instâncias genéricas para o Problema do Fluxo de Custo Mínimo

As instâncias para o PFCM foram obtidas através do software livre NETGEN (KLINGMAN, NAPIER e STUTZ, 1974). A nomenclatura dada nas tabelas 4.4 a 4.6 para cada instância é exatamente como foi encontrada na literatura. A tabela 4.4

apresenta as características de cada instância, como o número de nós, arcos e a solução ótima.

Tabela 4.4 – Características das instâncias genéricas para o PFCM

Instância	Nº de nós	Nº de arcos	Solução ótima
stndrd9	300	6.075	144.994.180
stndrd10	300	6.320	148.675.665
stndrd52	350	6.000	1.378
stndrd53	350	9.000	1.146
transp9	400	10.000	158.058.350
transp11	600	10.000	220.335.437
transp12	600	20.000	126.443.694
transp13	600	30.000	110.331.273
transp14	600	40.000	85.534.936
transp1	800	10.028	258.178.684
transp2	800	20.000	147.794.030
transp3	800	30.000	93.015.638
transp4	800	40.000	75.304.321
transp5	1.000	20.049	176.263.777
transp6	1.000	30.049	124.416.104
transp7	1.000	40.025	96.121.936
transp8	1.000	50.055	92.366.438
stndrd41	2.000	10.000	19.512
stndrd42	10.000	300.000	136.100

A Tabela 4.5 ilustra o tempo de execução, em segundos, dos quatro métodos implementados para a resolução das instâncias. Vale lembrar que apenas para as execuções que encontraram a solução ótima dentro do critério de parada estabelecido, o tempo gasto é apresentado. As execuções que não encontraram a solução ótima são representadas pelo símbolo “-”.

Tabela 4.5 – Tempo (em segundos) da execução dos algoritmos para o PFCM

Instância	Programação Inteira	Cancelamento de Ciclos Negativos	Sucessivos Caminhos Mínimos	Primal-Dual
stndrd9	0,3	94,3	40,2	77,2
stndrd10	0,3	107,6	50,1	98,3
stndrd52	0,5	18,1	18,3	11,9
stndrd53	0,7	17,1	15,7	14,7
transp9	0,6	255,6	132,4	235,4
transp11	0,9	480,3	323,8	697,8
transp12	2,0	1.466,4	888,2	1.667,4
transp13	3,6	2.235,7	1.386,1	2.412,7
transp14	4,9	2.929,3	2.024,3	3.090,2
transp1	1,3	742,5	587,8	1.258,3
transp2	3,0	2.149,9	1.456,9	2.866,1
transp3	4,9	3.404,1	2.552,7	-
transp4	6,8	-	3.103,4	-
transp5	4,0	2.939,8	2.611,3	-
transp6	6,3	-	-	-
transp7	8,8	-	-	-
transp8	11,4	-	-	-
stndrd41	6,4	137,9	704,2	266,8
stndrd42	226,7	-	-	-

Na Tabela 4.6, são apresentadas as execuções que não encontraram a solução ótima dentro do limite de tempo estabelecido. Note que alguns campos da tabela estão representados pelo símbolo “-”. O símbolo denota aquela execução que além de não encontrar a solução ótima dentro do critério de parada, não encontrou uma solução factível.

Tabela 4.6 – Solução encontrada na execução dos algoritmos para o PFCM

Instância	Solução Ótima	Programação Inteira	Cancelamento de Ciclos Negativos	Sucessivos Caminhos Mínimos	Primal-Dual
transp3	93.015.638	93.015.638	93.015.638	93.015.638	-
transp4	75.304.321	75.304.321	99.074.540	75.304.321	-
transp5	176.263.777	176.263.777	176.263.777	176.263.777	-
transp6	124.416.104	124.416.104	175.557.762	-	-
transp7	96.121.936	96.121.936	306.851.871	-	-
transp8	92.366.438	92.366.438	390.033.431	-	-
stndrd42	136.100	136.100	137.071	-	-

4.3. Análise dos resultados

Nessa seção serão discutidas as conclusões obtidas acerca dos resultados exibidos nas tabelas 4.1 a 4.6. Os quatro métodos de resolução implementados no trabalho para a resolução do Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares e do Problema do Fluxo de Custo Mínimo foram testados utilizando-se várias instâncias disponíveis na literatura.

Os resultados obtidos com o uso das instâncias referentes ao Problema da Alocação Biproporcional alcançaram a otimalidade da solução em todos os testes, considerando o algoritmo e a instância usada. O tempo de execução foi menor que dois segundos. Portanto, não foi possível realizar qualquer tipo de comparação entre algoritmos, devido ao pequeno tamanho das instâncias.

Analisando as informações apresentadas na Tabela 4.2 pode-se perceber que o erro na alocação de assentos entre partidos e distritos não é diretamente proporcional a quantidade de assentos de cada uma das instâncias. Prova disso se dá ao verificar que a segunda e terceira instância com menor número de assentos apresentaram os dois maiores erros na tabela.

É interessante notar que as instâncias “Farl04” e “Farl78” citadas acima descrevem o resultado das eleições de um mesmo país. Sendo assim, é relevante considerar que exista alguma característica peculiar do país que implica em um erro muito grande na alocação de assentos entre partidos e distritos do mesmo. Além disso, pode-se perceber que o número de partidos e distritos é o mesmo para as duas instâncias. Um estudo mais a fundo no Sistema Eleitoral do país dessas instâncias pode revelar qual é o fator impulsionante do aumento do erro na alocação de assentos.

Em síntese, os resultados obtidos para as instâncias do Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares foram satisfatórios, ressaltando aqui que o modelo gera apenas a matriz inteira de assentos que serão alocados entre distritos e partidos. A quantidade de assentos reservada para cada um dos distritos e partidos já estava pré-determinada em cada uma das instâncias utilizadas do PABAP.

As instâncias genéricas para o PFCM possuem dificuldade de resolução maior que a das instâncias do PABAP. Assim, os resultados obtidos, em exceção quando do uso da modelagem de programação inteira, foram razoáveis, inclusive em alguns casos não obtendo a solução ótima e/ou solução factível dentro do critério de parada estabelecido (tempo máximo de 3.600 segundos de execução).

Em suma, a modelagem de programação inteira alcançou resultados excelentes quando comparado aos resultados obtidos pelos outros algoritmos nas instâncias utilizadas nos experimentos. Acredita-se que a eficiência do método deve-se muito a utilização de um *solver* interno adequado para cada tipo de problema a ser resolvido.

Devido a discrepância entre os tempos de execução obtidos quando do uso do modelo de programação inteira para com o uso dos outros três algoritmos implementados, as comparações entre os tempos obtidos para a resolução do PFCM serão realizadas **somente** entre os algoritmos. Além disso, a semelhança existente entre esses algoritmos torna interessante uma comparação da eficiência dos mesmos na resolução do problema.

É importante ressaltar que as características da rede, como a quantidade de nós, arcos e o custo envolvido podem influenciar em melhores resultados de uma técnica em relação à outra. Como exemplo, para as instâncias *stndrd52* e *stndrd53*, os melhores resultados obtidos foram com o uso do Algoritmo Primal-Dual. O porquê desses melhores resultados deve-se à existência de vários caminhos mínimos em uma dada iteração, devido aos custos entre arestas serem por muitas vezes iguais.

A título de compreensão, o Algoritmo Primal-Dual envia fluxo máximo ao longo de vários caminhos mínimos em uma dada iteração, ao passo que o Algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos envia fluxo a apenas um caminho mínimo em cada iteração. Portanto, é compreensível deduzir o porquê da obtenção de melhores resultados para o algoritmo Primal-Dual.

Em contrapartida, para as instâncias onde os custos variam muito e/ou a rede é complexa em tamanho, o algoritmo que encontrou melhores resultados foi o Algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos. Para essas instâncias, a ideia de executar dois procedimentos, como no caso do Algoritmo Primal-Dual (obtenção do caminho mínimo \rightarrow Fluxo máximo), não funciona tão bem.

Além disso, a ideia da geração de um fluxo factível inicial, como no Algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos desacelera a convergência do algoritmo. A convergência do algoritmo é degradada devido à quantidade de ajustes realizados no fluxo inicial até que se alcance o Fluxo Máximo de Caminho Mínimo. A quantidade necessária de ajustes é diretamente proporcional a quantidade de arcos e nós da rede.

Pode-se perceber a partir da análise realizada que o algoritmo mais eficiente implementado foi o Algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos. A conclusão obtida refere-se apenas ao Algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos, Sucessivos Caminhos Mínimos e Primal-Dual. O modelo de programação inteira encontrou resultados de longe melhores que os outros algoritmos.

5. Considerações Finais

O trabalho realizado descreveu uma modelagem do Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares em redes, sendo reduzido a um Problema do Fluxo de Custo Mínimo.

A similaridade entre os dois problemas tornou possível a redução descrita. Os distritos foram considerados nós de oferta, ao passo que os partidos foram considerados nós de demanda. A lei de Conservação de Fluxo garante que todo o fluxo seja enviado, garantindo assim a alocação de todos os assentos.

Acredita-se que a presente modelagem é adequada, visto que a mesma objetiva uma alocação justa – em relação à população de cada distrito e o desempenho eleitoral de cada partido – de todos os assentos disponíveis no Congresso Nacional. Essa garantia, em alguns congressos, foi realizada de forma errônea, como citado e descrito durante o trabalho, ocasionando diferença no poder de votos entre distritos.

Além disso, a modelagem realizada aloca os assentos de forma proporcional a população de cada distrito e ao desempenho eleitoral de cada partido.

Infelizmente, existem muitos países no qual a distribuição biproporcional no Congresso não é realizada fazendo-se justiça aos partidos e distritos. O fato deve-se muito à influência política partidária existente em alguns países, o que leva ao favorecimento na alocação de assentos nacionais.

Uma das ideias iniciais do presente trabalho era simular a modelagem em redes do PABAP no Congresso Nacional Brasileiro. A proposta inicial de simulação foi motivada pela recente mudança na alocação de cadeiras no Congresso para as próximas eleições, descrita durante o texto. Uma comparação entre a nova alocação de assentos do Congresso e a alocação realizada pelo modelo em redes seria realizada. Porém, como já relatado anteriormente, o Congresso Nacional Brasileiro trabalha com a alocação proporcional de assentos, impossibilitando o estudo do mesmo no corrente trabalho.

Quanto aos resultados obtidos, as quatro técnicas utilizadas obtiveram resultados razoáveis para as instâncias do PABAP. Para as instâncias genéricas do

Problema do Fluxo de Custo Mínimo, é válido destacar os ótimos resultados encontrados com o uso do modelo de programação inteira em comparação aos resultados encontrados com o uso dos outros algoritmos implementados. Para esses algoritmos – Algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos, Sucessivos Caminhos Mínimos e Primal-Dual – os resultados foram razoáveis. Muito se deve ao aumento considerável no tamanho da rede.

Considerando apenas os últimos três algoritmos citados, a escolha de qual deles se utilizar varia muito do objetivo ao qual eles foram implementados. Considerando como objetivo um resultado ótimo e sem critérios de parada, o melhor algoritmo a se usar é o Algoritmo de Sucessivos Caminhos Mínimos. Tendo como objetivo um resultado factível dentro de um tempo estabelecido, o Algoritmo de Cancelamento de Ciclos Negativos é o mais apropriado, visto que o uso do Algoritmo SCM e do Algoritmo Primal-Dual poderiam implicar em soluções não factíveis.

Dadas as particularidades existentes na distribuição de assentos no Congresso Nacional Brasileiro e a eficiência obtida com a modelagem em redes para o PABAP, é sugerido como trabalho futuro, a modelagem do Problema da Alocação Proporcional de Assentos no Congresso Nacional Brasileiro para o PFCM. Uma nova modelagem se faz necessária, uma vez que a modelagem biproporcional do problema não reflete as necessidades do sistema eleitoral brasileiro.

Apêndice A – Publicação

Neste apêndice é listado um trabalho submetido a um evento científico desenvolvido durante o período de realização da presente pesquisa.

FONSECA, G. H. G.; VILAS BOAS, M. G. **Fluxo em Redes para o Problema da Alocação Biproporcional de Assentos Parlamentares**. Submetido para *XLV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2013, Rio Grande do Norte, Brasil.

Referências Bibliográficas

AHUJA, R. K., MAGNANTI, T. L., ORLIN, J. B. **NETWORK FLOWS: Theory, Algorithms, and Applications**. *Prentice-Hall, Inc.*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

AKARTUNALI, K., KNIGHT, P. A. **Network Models and Biproportional Apportionment for Fair Seat Allocations in the UK Elections**. *Technical Report*, University of Strathclyde, 2013.

ALBUQUERQUE, D. S. **Entenda como funciona a Câmara dos Deputados**. *Brasil*. Disponível em: <<http://brasil.thebeehive.org/content/2096/4999>>. Acessado em abril de 2013.

ASSESSORIA DE IMPRENSA E COMUNICAÇÃO SOCIAL. **TSE redefine cadeiras na Câmara dos Deputados para Eleições 2014**. Disponível em: <<http://www.tse.jus.br/noticias-tse/2013/Abril/tse-redefine-cadeiras-na-camara-dos-deputados-para-eleicoes-2014>>. Acessado em abril de 2013.

AUGSBURG, U. **Bazi: Berechnung von anzahlen mit zuteilungsmethoden im internet**. Disponível em: <<http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/bazi/>>. Acessado em maio de 2013.

BALINSKI, M. L., DEMANGE, G. **An Axiomatic Approach to Proportionality between Matrices**. *Mathematicals of Operations Research*, v. 14, n. 4, p. 700-719. 1989. Disponível em: <<http://hal.inria.fr/docs/00/68/67/48/PDF/Balinski-DemangeMOR.pdf>>. Acessado em maio de 2013.

BELLMAN, R. **On a routing problem**. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1958.

BRANDÃO, H. **Teoria dos Grafos: Fluxo Máximo**. Notas de aula. Disponível em <http://homepages.dcc.ufmg.br/~humberto/unifal/aulas/grafos/aula_14_Fluxo_Maximo.pdf>. Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas. Acessado em maio de 2013.

CAMPONOGARA, E. **Métodos de Otimização: Teoria e Prática, versão preliminar**. 2006. Departamento de Automação e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina, 350 f. Disponível em <<http://www.das.ufsc.br/~camponog/Disciplinas/DAS-9011/LN.pdf>>. Acessado em maio de 2013.

CAMPOS, V. B. G. **Algoritmos para Resolução de Problemas em Redes**. 2007. Apostila. Instituto Militar de Engenharia, Pós-Graduação em Engenharia de Transportes. Disponível em <www.ime.eb.br/~webde2/prof/vania/apostilas/Apostila-Redes.pdf>. Acessado em maio de 2013.

ECK, L. VAN, VISAGIC, SE., KOCK, HC. **Fairness of seat allocation methods in proportional representation**. 2005. *Orion*, v. 21, n. 2, p. 93-110. Disponível em: <http://www.orssa.org.za/wiki/uploads/ORION/ORION_21_93-110.pdf>. Acessado em maio de 2013.

FEOFILOFF, P. **Fluxo em Redes**. 2004. Notas de aula. Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Ouro Preto. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/~pf/flows/mynotes/FluxoEmRedes.pdf>>. Acessado em maio de 2013.

FORD, L. R., FULKERSON, D. R. **Flows in Networks**. Princeton University Press, 1962.

HOSHINO, E. A., PEDROTTI, V. **Algoritmos pseudopolinomiais para o problema do fluxo de custo mínimo**. Notas de aula. 2007. Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: <www.ic.unicamp.br/~lee/mo824/mcf-4pp.pdf>. Acessado em maio de 2013.

JUNIOR, R. A. X. **Algoritmo BSP/CGM para o Problema do Fluxo Máximo em Redes**. 2010. Dissertação. Faculdade de Computação, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Disponível em: <ww.dct.ufms.br/gestor/titan.php?target=openFile&fileId=468>. Acessado em maio de 2013.

KLEIN, M. **A primal method for minimum cost flows with application to the assignment and transportation problem**. *Management Science*, p. 205-220, 1967.

KLINGMAN, D., NAPIER, A., STUTZ, J. **NETGEN: A program for generating large scale capacitated assignment, transportation, and minimum cost flow networks**. *Management Science*, p. 814-820, 1974.

LEMES, D. F., SILVA, G. P. **Apostila de Fluxo em Redes**. Programa PRÓ-ATIVA da UFOP, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Departamento de Computação. jun. 2006.

MOBERG, A. **The Voting System in the Council of the European Union. The Balance Between Large and Small Countries**. *Scandinavian Political Studies*, v. 21, n. 4, p. 347-365, dez. 2008.

NOGUEIRA, F. **Problema de Fluxo de Custo Mínimo. The Minimum Cost Flow Problem**. Notas de aula. Disponível em: <www.ufjf.br/epd015/files/2010/06/fluxo_custo_minimo.pdf>. Acessado em maio de 2013.

OELBERMANN, K. **Alternative Scaling Algorithm for Biproportional Divisor Methods**. 2013. Institut für Mathematik, Universität Augsburg. Disponível em: <http://opus.bibliothek.uni-augsburg.de/opus4/files/2268/mpreprint_13_004.pdf>.

Acessado em maio de 2013.

PENNISI, A. **The Italian bug: A flawed procedure for bi-proportional seat allocation**. *Mathematics and Democracy – Recent Advances in Voting Systems and Collective Choice*. p. 151-166, Berlim, 2006.

PENNISI, A., RICCA, F., SERAFINI, P., SIMEONE, B. **Ottimizzazione combinatoria per la progettazione di sistemi elettorali**. *Scienza delle decisioni in Italia: Applicazioni della Ricerca Operativa ai problemi aziendali*, ECIG, p. 75-87, Genova, 2008.

PUKELSHEIM, F., RICCA, F., SIMEONE, B., SCOZZARI, A., SERAFINI, P. **Network Flow Methods for Electoral Systems**. *Networks*. *Wiley Periodicals, Inc.* v. 59, p. 73-88, nov. 2011.

RAMÍREZ, V., PUKELSHEIM, F., PALOMARES, A., MARTÍNEZ, J. **A bi-proportional method applied to the Spanish Congress**. *Mathematical and Computer Modeling*, v. 48, p. 1461-1467, 2008.

ROSSETTI, R., ROCHA, A. P., PEREIRA, A., SILVA, P. B., FERNANDES, T. **Algoritmos em Grafos: Fluxo Máximo e Fluxo de Custo Mínimo em Redes de Transporte**. Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto. Notas de aula. 2010/2011. Disponível em: <http://paginas.fe.up.pt/~rossetti/rrwiki/lib/exe/fetch.php?media=teaching:1011:cal:07_2.08_1.grafos5.pdf>. Acessado em maio de 2013.

SALMI, O. **Biproportional Sainte-Laguë**. 2004. Disponível em: <http://www.uusikaupunki.fi/~olsalmi/vaalit/Biproportional_E>. Acessado em maio de 2013.

SILVA, G. P. **BCC 463 - Otimização em Redes ou Fluxo em Redes**. Notas de aula. Departamento de Computação, Universidade Federal de Ouro Preto. Disponível em: <www.decom.ufop.br/gustavo/bcc463/Aula1.pdf>. Acessado em maio de 2013.

SIMÃO, J. B., HASHIMOTO, M. **Fluxos em Redes**. Trabalho de Formatura Supervisionado. Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. Disponível em <<http://bcc.ime.usp.br/principal/tccs/2004/rec/juliana/texto.pdf>>. Acessado em maio de 2013.

SOKKALINGAM, P. T., AHUJA, R. K., ORLIN, J. B. **New polynomial-time cycle-canceling algorithms for minimum-cost flows**. 1997. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.86.5026&rep=rep1&type=pdf>>. Acessado em maio de 2013.