UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Curso de Matemática - Bacharelado

Décima Lista de Exercícios de Análise III - MTM228
Prof. Júlio César do Espírito Santo

02 de Agosto de 2016

(1) Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva com $\int_0^1 f = \int_1^2 f = 1$.

(a) Defina $F : [0,1] \times [1,2] \to \mathbb{R}$ por $F(x,y) = \int_x^y f$. Mostre que $F \in C^1$. Verifique então que, para todo $x_0 \in [0,1]$, existe $y_0 \in [1,2]$ tal que $F(x_0,y_0) = 1$.

(b) Para cada $x \in [0,1]$, seja g definida implicitamente por

$$\int_x^{g(x)} f = 1.$$

Mostre que $g \in C^1$.

(2) Sejam $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ curvas de classe C^1 tais que

$$\alpha(0) = \beta(0) = (0,0)$$

e $\alpha'(0)$ e $\beta'(0)$ são linearmente independentes. Mostre que existem U e V, abertos de $\mathbb{R}^2$, e um difeomorfismo $\varphi : U \to V$, de Classe C^1, satisfazendo $\varphi(0,0) = (0,0)$, $\varphi(\alpha(x)) = (x,0)$, $\varphi(\beta(y)) = (0,y)$, sempre que $\alpha(x)$, $\beta(y) \in U$.

(3) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Decida por verdadeiro ou falso, com justificativa.

(a) (   ) $f'(0) = 1$.

(b) (   ) Existem intervalos abertos I e J contendo $0 \in \mathbb{R}$ tais que a restrição $f : I \to J$ é um difeomorfismo.

(4) Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4\cos t}.$$

(5) Seja $F : U \to \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^5$ aberto, uma função definida por $F = (f_1, f_2)$, em que $f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4_2 + 3$, e $f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_2 \cos(x_1) - 6x_1 + 2y_1 - y_3$.

(a) Se $a = (0, 1)$ e $b = (3, 2, 7)$, calcule $F(a, b)$ e mostre que existe uma aplicação g, de classe C^1, definida numa vizinhança V de b tal que $g(b) = a$ e $F(g(y), y) = 0$, para todo y em V.

(b) Calcule $Dg(3, 2, 7)$.

(6) Faça o que se pede.

(a) Seja $f : U \to \mathbb{R}$, uma função de classe C^k, com $k \geq 1$, definida no aberto U de $\mathbb{R}^{n+1}$. Mostre que se c é um valor regular de f, então $f^{-1}(c)$ é uma superfície de classe C^k e dimensão n.

(b) Mostre que a esfera $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ ||x|| = 1\}$ é uma superfície de classe C^∞ de dimensão n.

(7) Use uma integral de superfície para provar que

(a) A área da superfície esférica de raio a parametrizada por

$$\Gamma(u, v) = a \operatorname{sen} u \cos v \mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \mathbf{j} + a \cos u \mathbf{k}$$

onde $u \in [0, \pi]$ e $v \in [0, 2\pi]$ é igual a $A = 4\pi a^2$.

(b) A área da superfície em forma de toro parametrizada por

$$\Gamma(u, v) = (a + b \cos u) \cos v \mathbf{i} + (a + b \cos u) \operatorname{sen} v \mathbf{j} + b \operatorname{sen} u \mathbf{k}$$

onde $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [0, 2\pi]$ é igual a $A = 4\pi^2 ab$.

(8) Para calcularmos as chamadas *Curvatura Gaussiana* $K(p)$ e *Curvatura Média* $H(p)$ de uma superfície parametrizada por

$$\Gamma(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

no ponto p, são respectivamente dadas as fórmulas

$$K(p) = \frac{\ell n - m^2}{W} \qquad \text{e} \qquad H(p) = \frac{G\ell + En - 2Fm}{2W},$$

em que $E = ||\Gamma_u||^2$, $F = \Gamma_u \cdot \Gamma_v$, $G = ||\Gamma_v||^2$, $W = ||\Gamma_u \times \Gamma_v||^2$ e $\mathbf{N}$ é o vetor normal unitário a superfície em p dado por

$$\mathbf{N} = \frac{\Gamma_u \times \Gamma_v}{||\Gamma_u \times \Gamma_v||}.$$

Além disso, definimos as funções

$$\ell(p) = \mathbf{N}(u, v) \cdot \Gamma_{uu}, \qquad m(p) = \mathbf{N}(u, v) \cdot \Gamma_{uv} \quad \text{e} \quad n(p) = \mathbf{N}(u, v) \cdot \Gamma_{vv}.$$

Calcule as Curvaturas Gaussiana e Média para o toro e a esfera cujas parametrizações foram dadas no exercicio anterior.

(9) Decida por (V)erdadeiro ou (F)also e justifique:

(a) A aplicação $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, dada por $f(x,y,z)=(x,x+y,x+y+z)$ preserva volume.

(b) A função $f:R^2\to\mathbb{R}$, dada por $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, para $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(0,0)=0$, é diferenciável.

(c) O plano $\mathbb{R}^2$ é homeomorfo a esfera $\mathbb{S}^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x^2+y^2+z^2=1\}$.

(d) A aplicação $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dada por $f(x,y)=x^3$ é uma submersão.

(e) A função $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y)=\begin{cases} f(x,y)=0, & \text{se } x\neq\frac{1}{2},\\ f(\frac{1}{2},y)=1, & \text{se } y \text{ é racional}\\ f(\frac{1}{2},y)=0, & \text{se } y \text{ é irracional.}\end{cases}$$

é integrável.

(10) Prove que não existe imersão de $f:R^m\to\mathbb{R}^n$ se $m>n$.

(11) Seja a aplicação $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, definida por

$$f(x,y)=(x^2-y^2,2xy).$$

Determine os pontos de $\mathbb{R}^2$ para os quais f é localmente invertível e determine se f tem uma inversa definida em todo $\mathbb{R}^2$.

(12) Seja $f:U\to\mathbb{R}^n$, de Classe C^1 no aberto U de $\mathbb{R}^n$. Para algum $a\in U$, seja $Df(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ um isomorfismo. Mostre que

$$\lim_{r\to 0}\frac{vol.f(B[a;r])}{vol.B[a;r]}=|\det Df(a)|.$$

(13) Seja $f:I\to R$ convexa. Dado $x_0\in interior\{I\}$, tome $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $a<x_0<b$ e $[a,b]\subset I$.

Defina

$$g(x)=\frac{(x-x_0)f(b)+(b-x)f(x_0)}{b-x_0}$$

e

$$h(x)=\frac{(x_0-x)f(a)+(x-a)f(x_0)}{x_0-a}.$$

(i) Mostre que $\min\{g(x),h(x)\}\leq f(x)\leq max\{g(x),h(x)\}$ para todo $x\in[a,b]$.

(ii) Conclua que f é contínua em x_0.

(14) Dado um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, considere a função distância

$$d_A(x) = \inf\{||x - a|| \,/\, a \in A, x \in \mathbb{R}^n\},$$

onde $|| \cdot ||$ é uma norma qualquer em $\mathbb{R}^n$.

(i) Mostre que $d_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua.

(ii) (Versão para espaços métricos do Lema de Uryshon) Se A e B são conjuntos não-vazios fechados disjuntos em $\mathbb{R}^n$, mostre que

$$\varphi(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$$

está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e que a função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades: φ é contínua; $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$; $\varphi(x) = 1$ se, e somente se, $x \in B$; e $\varphi(x) = 0$ se, e somente se, $x \in A$.

(iii) Considerando A, B e φ como no item (ii), mostre que φ é Lipschitz contínua se, e somente se,

$$\inf\{||a - x|| \,/\, a \in A, b \in B\} > 0.$$

(15) Dada $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^n$, seja $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^n$ a *extensao radial* de f definida por

$$F(x) = \begin{cases} ||x|| f(\frac{x}{||x||}), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Mostre que F é diferenciável em 0 se, e somente se, F é linear.

(16) O Quociente de Rayleigh ρ_A de uma matriz hermitiana A é definido para $x \neq 0$ por

$$\rho_a(x) = \frac{\langle x,\, Ax\rangle}{\langle x,\, x\rangle}.$$

Utilize o Quociente de Rayleigh para cotas inferiores para o maior autovalor e cotas superiores para o menor autovalor da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(17) Seja $\det : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a função determinante definida no conjunto das matrizes de ordem n. Calcule a diferencial de $\det$ em $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(18) Justifique rigorosamente a frase: A derivada de uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear.

(19) Se $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são integráveis, então $f \cdot g$ também é.

(20) Considerando o espaço $\mathbb{R}^n$, enuncie da maneira mais completa possível: o Teorema da Função Inversa, o Teorema da Função Implícita, a Regra da Cadeia, o Teorema de Fubini, o Teorema de Lebesgue, o Teorema da Partição da Unidade, o Teorema de Mudança de Variáveis e o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema de Stokes.

Bom Descanso!