

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

11a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

14 de maio de 2018

(1) Seja  $z = x + jy$  e considere a transformação

$$w = f(z) = \operatorname{sen}(z).$$

Se  $w = u + jv$ , escreva as partes real  $u(x, y)$  e imaginária  $v(x, y)$  de  $f$ . Agora mostre que  $f$  transforma:

(a) o eixo- $y$  no eixo- $v$ , mantendo sua orientação;

(b) as retas verticais  $x = c$ , com  $c \in (0, \pi/2)$  no ramo direito da hipérbole

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 c} - \frac{v^2}{\operatorname{cos}^2 c} = 1,$$

com focos em  $(\pm 1, 0)$ ;

(c) a reta  $x = \pi/2$  na semireta dada por  $(u, 0)$  com  $u \geq 1$ .

(d) Agora, como  $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$ , conclua que as retas verticais  $x = c$ , com  $c \in [-\pi/2, 0)$  são levadas no ramo esquerdo da hipérbole acima e na semi-reta  $(u, 0)$  com  $u \leq -1$ . Desenhe.

(e) Mostre que  $f$  transforma a reta horizontal  $y = c$  na curva

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} c, \\ v = \operatorname{cos} x \operatorname{senh} c, \end{cases}$$

que, no caso em que  $c \neq 0$ , é a elipse

$$\frac{u^2}{\operatorname{cosh}^2 c} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 c} = 1.$$

(f) Mostre que a imagem do segmento de reta  $0 \leq x \leq \pi$ ;  $y = c$  é o lado direito da elipse, e do segmento de reta  $\pi \leq x \leq 2\pi$ ;  $y = c$  é o lado esquerdo e que o eixo- $x$  é levado nos pontos de eixo- $u$  em que  $-1 \leq u \leq 1$ . Desenhe.

Bons estudos!