

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

11a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

14 de maio de 2018

(1) Seja $z = x + jy$ e considere a transformação

$$w = f(z) = \operatorname{sen}(z).$$

Se $w = u + jv$, escreva as partes real $u(x, y)$ e imaginária $v(x, y)$ de f . Agora mostre que f transforma:

(a) o eixo- y no eixo- v , mantendo sua orientação;

(b) as retas verticais $x = c$, com $c \in (0, \pi/2)$ no ramo direito da hipérbole

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 c} - \frac{v^2}{\operatorname{cos}^2 c} = 1,$$

com focos em $(\pm 1, 0)$;

(c) a reta $x = \pi/2$ na semireta dada por $(u, 0)$ com $u \geq 1$.

(d) Agora, como $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$, conclua que as retas verticais $x = c$, com $c \in [-\pi/2, 0)$ são levadas no ramo esquerdo da hipérbole acima e na semi-reta $(u, 0)$ com $u \leq -1$. Desenhe.

(e) Mostre que f transforma a reta horizontal $y = c$ na curva

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} c, \\ v = \operatorname{cos} x \operatorname{senh} c, \end{cases}$$

que, no caso em que $c \neq 0$, é a elipse

$$\frac{u^2}{\operatorname{cosh}^2 c} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 c} = 1.$$

(f) Mostre que a imagem do segmento de reta $0 \leq x \leq \pi$; $y = c$ é o lado direito da elipse, e do segmento de reta $\pi \leq x \leq 2\pi$; $y = c$ é o lado esquerdo e que o eixo- x é levado nos pontos de eixo- u em que $-1 \leq u \leq 1$. Desenhe.

Bons estudos!