UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

12a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

14 de maio de 2018

(1) Para cada arco γ e função f abaixo, encontre o valor de

$$\int_\gamma f(z)dz,$$

após observar que γ é um contorno[1] e que f é contínua por partes.

(a) $f(z) = y - x - 3x^2yj$ e γ

(i) é o segmento de reta de $z = 0$ até $z = 1 + j$;

(ii) consiste de dois segmentos de reta, um de $z = 0$ até $z = j$ e outro de $z = j$ até $z = 1 + j$;

(iii) consiste de dois segmentos de reta, um de $z = 0$ até $z = 1$ e outro de $z = 1$ até $z = 1 + j$;

Resp. $(3/4)(1 - j); (1/2)(1 - j); 1 - j/2$

(b) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ e γ é

(i) o semicírculo $z = 2e^{j\theta}$, com $0 \leq \theta \leq \pi$;

(ii) o semicírculo $z = 2e^{j\theta}$, com $\pi \leq \theta \leq 2\pi$;

(iii) o círculo $z = 2e^{j\theta}$, com $-\pi \leq \theta \leq \pi$;

Resp. $2\pi j - 4; 2\pi j + 4; 4\pi j$

(c) $f(z) = z - 1$ e γ é o arco de $z = 0$ até $z = 2$ consistindo do

(i) semicírculo $z - 1 = e^{j\theta}$, com $0 \leq \theta \leq \pi$;

(ii) segmento com $0 \leq x \leq 2; y = 0$ de sobre o eixo-x;

Resp. $0; 0$

(d) γ é o arco de $z = -1 - j$ até $z = 1 + j$ ao longo da curva $y = x^3$, e

$$f(z) = \begin{cases} 4y, & y > 0 \\ 1, & y < 0 \end{cases}$$

Resp. $2 + 3j$

(e) $f(z) = e^z$ e γ é o arco de $z = \pi j$ até $z = 1$ consistindo

(i) do segmento de reta que une estes pontos;

(ii) da porção dos eixos coordenados que ligam esses pontos.

Resp. $1 + e; 1 + e$

[1] Lembre-se que um contorno é uma curva consistindo de um numero finito de arcos suaves por partes; que um arco é uma curva $\gamma(t)$ contínua e que ser suave significa que a derivada $\gamma'(t)$ existe, é continua e nunca se anula em seu domínio.

(2) Seja α o arco do círculo $|z| = 2$ de $z = 2$ à $z = 2j$ que está no primeiro quadrante. Sem calcular a integral, mostre que
$$\left|\int_\alpha \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \pi/3.$$

(3) Determine o domínio de analiticidade da função f e aplique o teorema de Cauchy-Goursat para calcular
$$\int_\gamma f(z)dz,$$
onde a curva fechada simples γ é a circunferência $|z| = 1$ e

(a) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-3}$ (b) $f(z) = ze^{-z}$ (c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+2}$

(d) $f(z) = \text{sech} z$ (e) $f(z) = \text{tg} z$ (f) $f(z) = \log(z+2)$

Resp. Todas nulas.

(4) Seja B a fronteira da região no interior da circunferência $|z| = 4$ e no exterior do quadrado de vértices $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, orientadas positivamente. Calcule
$$\int_B f(z)dz,$$
onde

(a) $f(z) = \dfrac{1}{3z^2+1}$ (b) $f(z) = \dfrac{z+2}{\text{sen}(z/2)}$ (c) $f(z) = \dfrac{z}{1-e^z}$

Resp. Todas nulas.

(5) Seja C uma curva fechadas simples no interior de uma curva fechada simples C_0 ambas orientadas no sentido anti-horário. Mostre que se f é analítica na região fechada delimitada por C e C_0, então
$$\int_C f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz.$$

(6) Use o resultado do exercício anterior (calculando a integral de linha sobre uma circunferência conveniente de sua preferência) para mostrar que
$$\int_\gamma \frac{dz}{z-2-j} = 2\pi j;$$
onde a curva γ é o retângulo $0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2$ orientado no sentido positivo.

Bons estudos!