

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

13a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

23 de maio de 2018

(1) Calcule cada uma das integrais de linha, onde a curva  $\gamma$  é um contorno arbitrário<sup>1</sup> entre pontos indicados nos limites de integração.

(a)  $\int_j^{j/2} e^{\pi z} dz$

(b)  $\int_0^{\pi+2j} \cos(z/2) dz$

(c)  $\int_1^3 (z-2)^3 dz$

(d)  $\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2}; \quad z_1 \neq z_2 \text{ e } z_1, z_2 \neq 0.$

Resp.  $(1+j)/\pi; e+1/e; 0; 1/z_1 - 1/z_2$

(2) Seja  $\gamma$  a circunferência  $|z| = 3$ , descrita no sentido positivo. Supondo que

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{2s^2 - s - 2}{s - z} ds$$

onde  $|z| \neq 3$ . Calcule  $g(2)$  e  $g(z)$ , quando  $|z| > 3$ .

Resp.  $8\pi j; 0$

(3) Seja  $\gamma$  uma curva fechada simples descrita no sentido positivo e seja

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{s^3 + 2s}{(s - z)^3} ds.$$

Calcule  $g(z)$ , quando  $z$  esta no interior de  $\gamma$  e, em seguida, calcule  $g(z)$ , quando  $z$  esta no exterior de  $\gamma$ .

Resp.  $6\pi j z; 0$

---

<sup>1</sup>assumindo apenas que a curva está dentro de um domínio simplesmente conexo no qual a função no integrando é analítica

- (4) Seja  $C$  a fronteira do quadrado no plano complexo cujos lados estão ao longo das linhas  $x = \pm 2$  e  $y = \pm 2$ , descrito no sentido positivo. Calcule cada uma destas integrais.

(a)  $\int_C \frac{\exp(-z)dz}{z - \pi j/2}$

(b)  $\int_C \frac{\cos z dz}{z(z^2 + 8)}$

(c)  $\int_C \frac{z dz}{2z + 1}$

(d)  $\int_C \frac{\operatorname{tg}(z/2) dz}{(z - x_0)^2}$ ; com  $-2 < x_0 < 2$

(e)  $\int_C \frac{\cosh z dz}{z^4}$

(f)  $\int_C \frac{\operatorname{sech}(z) dz}{z(z - \pi^2\sqrt{2}/e)(z - e^2\sqrt{2}/\pi)}$ ;

Resp.  $2\pi; \pi j/4; -\pi j/2; j\pi \sec^2(x_0/2); 0; j/e$

- (5) Encontre o valor da integral de  $g(z)$  em torno da curva fechada simples

$$|z - j| = 2,$$

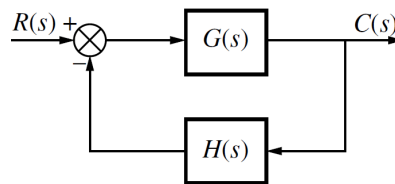
orientada no sentido positivo quando,

(a)  $g(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$

(b)  $g(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2}$

Resp.  $\pi/2; \pi/16$

- (6) Suponha que para o sistema abaixo, está associada a curva da imagem abaixo



(Estamos tratando de um *Nyquist Plot* de  $G(s)H(s)$ ). Responda: Quantas vezes esta curva circula a origem? Quantas vezes essa curva circula o ponto  $z = -1$ ?

