UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

14a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

07 de outubro de 2018

(1) Seja $G(s)$, em que $s = \sigma + j\omega$, a função de transferência de um determinado sistema. Calcule a imagem do eixo imaginário inteiro; isto é, calcule $G(j\omega) = |G(j\omega)| \exp(\arg(G(j\omega)))$, identificando o módulo $|G(j\omega)|$ e o argumento $\arg(G(j\omega))$. Considere T, L, ω_n e ζ constantes reais.

(a) $G(s) = \dfrac{1}{1 + sT}$ (b) $G(s) = \dfrac{1}{Ts}$ (c) $G(s) = \dfrac{1}{s(Ts+1)}$

(d) $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n{}^2}$ (e) $G(s) = e^{-sT}$ (f) $G(s) = \dfrac{e^{-sL}}{s(Ts+1)}$.

(2) Determine o fator de escala $|f'(z_0)|$ e o angulo de rotação $\psi_0 = \arg[f'(z_0)]$ que são produzidos pela transformação

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

nos pontos (a) $z = 1$ (b) $z = j$ (c) $z = -2$ (d) $z = 1 + j$ e (e) $z = re^{j\theta}$.

Resp. $1, \pi; 1, 0; 1/4, \pi; 1/2, \pi/2; 1/r^2, \pi - 2\theta$.

(3) Seja o quadrado de vértices $1 \pm j$ no plano-z, incluindo os segmentos de reta que são a porção dos eixos $x = 0$ e $y = 0$ no interior do quadrado. Obtenha no plano-$f(z)$ a imagem deste quadrado para cada função $w = f(z)$ abaixo. Desenhe-a no plano-w.

(a) $f(z) = 1/z$ (b) $f(z) = 2z + j$ (c) $f(z) = e^z$

(d) $f(z) = z^2$ (e) $f(z) = \text{sen}(z)$ (f) $f(z) = \dfrac{z+j}{z-j}$

(Bilinear Moëbius Transformation)

(4) (Pólos e Zeros) Um **zero de ordem m** de uma função $w = f(z)$ é um número complexo $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z_0) = 0$$

e todas as derivadas

$$f'(z_0) = f''(z_0) = f'''(z_0) = \cdots = f^{(m-2)}(z_0) = f^{(m-1)}(z_0) = 0,$$

mas

$$f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Um **pólo de ordem m** é um número complexo $z_0 \in \mathbb{C}$ para o qual existe uma função $\phi(z)$, holomorfa em z_0, com $\phi(z_0) \neq 0$ e um inteiro não negativo m para os quais

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}.$$

(Um pólo de ordem 1 é chamado de pólo simples)

(a) Calcule os zeros de

$$f(z) = \operatorname{sen} z$$

(b) Calcule os zeros e determine a ordem dos mesmos onde

$$f(z) = 3(z-1)^2.$$

(c) obtenha os zeros com suas ordens e os pólos e suas ordens onde

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+9}.$$

(d) obtenha os zeros com suas ordens e os pólos e suas ordens onde

$$f(z) = \frac{z+2}{(z-5)^2(z+7)^3}.$$

Bons estudos!