UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

14a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146
Prof. Júlio César do Espírito Santo

29 de maio de 2019

(1) Se b e c são constantes e $s = \sigma + j\omega$, prove.

(a) $\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}, \quad \sigma > 0,$ (b) $\mathcal{L}\left\{e^{bt}f(t)\right\} = F(s-b),$ (c) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$

(d) $\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \dfrac{2!}{s^3}, \ \sigma > 0,$ (e) $\mathcal{L}\{f(ct)\} = \dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right), \ c > 0,$ (f) $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$

(2) Seja $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx$. Calcule $g'(t)$ e use que $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ para mostrar que $F(s) = sG(s)$. Em seguida conclua que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(x)dx.$$

(3) Prove que $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s)$, onde $u_c(t)$ é a *Função de Heaviside*

$$u_c(t) = \begin{cases} 1, & t \geq c, \\ 0, & t < c. \end{cases}$$

(4) Seja $n \in \mathbb{N}$. Sabendo que $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$, calcule (a) $\mathcal{L}\{te^t\}$ e (b) $\mathcal{L}\{t^2e^t\}$.

R. $a.(s-1)^{-2}, \sigma > 1.$

(5) Sejam a, b constantes. Use a definição de Transformada de Laplace e os teoremas de deslocamento para calcular

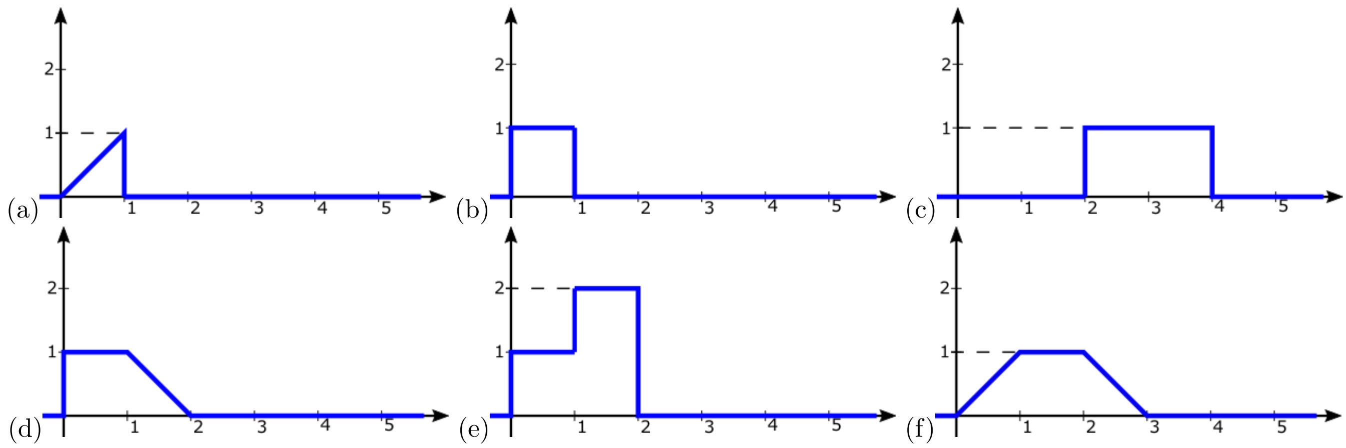
(a) $\mathcal{L}\{\cos bt\}$ (b) $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} bt\}$ (c) $\mathcal{L}\{\cosh\, bt\}$ (d) $\mathcal{L}\{\operatorname{senh} bt\}$

(e) $\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\}$ (f) $\mathcal{L}\left\{e^{at}\operatorname{sen} bt\right\}$ (g) $\mathcal{L}\left\{e^{at}\cosh\, bt\right\}$ (h) $\mathcal{L}\left\{e^{at}\operatorname{senh} bt\right\}$

(i) $\mathcal{L}\{u_b(t)\}$ (j) $\mathcal{L}\{tu_2(t)\}$ (k) $\mathcal{L}\{t - u_1(t)(t-1)\}$ (l) $\mathcal{L}\{1 - t + u_1(t)(t-1)\}$

R. Confira na tabela.

(6) Utilize as funções degrau para escrever uma expressão para as funções abaixo e obtenha a Transformada de Laplace de cada uma delas.



(7) Obtenha a Transformada de Laplace Inversa abaixo.

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+6s+10}\right\}$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{s^2+6s+10}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{s^2+6s+10}\right\}$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-4}{s^2+6s+10}\right\}$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-4}{s^2+6s+8}\right\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-4}{s^2+6s+15}\right\}$

(g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+3}{s^2-4s+20}\right\}$ (h) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{s^2-2s+5}\right\}$ (i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2se^{-2s}+3e^{-2s}}{s^2-4s+20}\right\}$

(j) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{9}{s^2+9}\right\}$ (k) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{9}{s^2+10s+9}\right\}$ (l) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{9}{s^2+6s+9}\right\}$

R. Dica: Use completamento de quadrado no denominador e o Teorema do deslocamento complexo visto em sala.

(8) Use frações parciais para obter $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s^2-1)}\right\}$. Agora use a última fórmula do exercício (2) para obter $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2-1)}\right\}$, em seguida após nova aplicação da mesma fórmula, calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s^2-1)}\right\}$.

R. $\mathrm{senh}t - t$.

(9) Se $f(t)=2t$ e $g(t)=t^3$. Calcule a convolução $(f*g)(t)$, onde $(f*g)(t)=\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$.

R. $t^5/10$;

(10) Calcule a Transformada de Laplace Inversa de $F(s)=\dfrac{1}{s^4(s^2+1)}$ por meio de uma integral de convolução.

(11) Sabendo que $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\}=(f*g)(t)$, calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2-1}\right\}.$$

R. $-t+\mathrm{senh}t$;

(12) Calcule (a) t^2*e^{-3t}; (b) $e^{-3t}*t^2$; (c) $e^{-2}*e^{-t}$; (d) $t*\mathrm{senh}(t)$.

(13) Calcule a convolução entre as funções das letras (b) e (c); (a) e (c); (d) e (f); (e) e (f) do exercício (6) acima. Plote os resultados em um software gráfico qualquer (como o Geogebra, por exemplo).

(14) Use a tabela de transformadas de Laplace para obter as transformadas inversas abaixo.

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^3}\right\}$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+b-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{s^2+6s+13}\right\}$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+3}{s^2+6s+13}\right\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{2s^2+8s+11}\right\}$

(15) Use Transformadas de Laplace para resolver os Problemas de valor inicial a seguir.
Plote as soluções em um aplicativo gráfico e observe.

(a) $\begin{cases} x'' + 9x = 9u_0(t); \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x'' + 10x' + 9x = 9u_0(t); \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x'' + 6x' + 9x = 9u_0(t); \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'' + 2x' + 9x = 9u_0(t); \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \end{cases}$ (e) $\begin{cases} y'' + y = \delta(t-2\pi); \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2y'' + y' + 2y = \delta(t-5); \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0; \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 4, \end{cases}$ (h) $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0; \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 6, \end{cases}$ (i) $\begin{cases} x'' + x = 0; \\ x(0) = -1, \quad x'(0) = -1, \end{cases}$

(j) $\begin{cases} y'' - 7y' + 10y = 0; \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = -5, \end{cases}$ (k) $\begin{cases} y'' + 5y' - 6y = 0; \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = -5, \end{cases}$.

Fim.

Bons estudos!