UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

15a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

11 de outubro de 2018

(1) Prove.

(a) $\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$ para $Re(s) > 0$.

(b) $\mathcal{L}\left\{e^{bt}f(t)\right\} = F(s-b)$,

(c) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$.

(2) Seja $g(t) = \int_0^t f(x)dx$. Calcule $g'(t)$ e use o último resultado do exercício anterior para mostrar que $F(s) = sG(s)$. Em seguida conclua que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(x)dx.$$

(3) Prove que $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s)$, onde $u_c(t)$ é a *Função de Heaviside*

$$u_c(t) = \begin{cases} 1, & t \geq c, \\ 0, & t < c. \end{cases}$$

(4) Sejam a,b constantes. Use a definição de Transformada de Laplace e os teoremas de deslocamento para calcular

(a) $\mathcal{L}\{\cos bt\}$ (b) $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} bt\}$ (c) $\mathcal{L}\{\cosh\, bt\}$ (d) $\mathcal{L}\{\operatorname{senh} bt\}$

(e) $\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\}$ (f) $\mathcal{L}\left\{e^{at}\operatorname{sen} bt\right\}$ (g) $\mathcal{L}\left\{e^{at}\cosh\, bt\right\}$ (h) $\mathcal{L}\left\{e^{at}\operatorname{senh} bt\right\}$

(i) $\mathcal{L}\{u_b(t)\}$ (j) $\mathcal{L}\{tu_2(t)\}$ (k) $\mathcal{L}\{t - u_1(t)(t-1)\}$ (l) $\mathcal{L}\{1 - t + u_1(t)(t-1)\}$

`R. Confira na tabela.`

(5) Use frações parciais para obter $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s^2-1)}\right\}$. Agora use a ultima fórmula do exercício (2) para obter $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2-1)}\right\}$, em seguida após nova aplicação da mesma fórmula, calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s^2-1)}\right\}$.

`R. Feito em sala.`

(6) Se $f(t) = 2t$ e $g(t) = t^3$. Calcule a convolução $(f \star g)(t)$, onde $(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-\nu)g(\nu)d\nu$.

R. $t^5/10$;

(7) Sabendo que $\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = (f \star g)(t)$, calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2-1}\right\}.$$

R. $-t + \text{senh}t$;

(8) Calcule (a) $t^2 \star e^{-3t}$; (b) $e^{-3t} \star t^2$; (c) $e^{-2} \star e^{-t}$; (d) $t \star \text{senh}(t)$.

(9) Use a tabela de transformadas de Laplace para obter as transformadas inversas abaixo.

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^3}\right\}$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+b-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{s^2+6s+13}\right\}$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+3}{s^2+6s+13}\right\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{2s^2+8s+11}\right\}$

(10) Use Transformadas de Laplace para resolver os Problemas de valor inicial a seguir.

(a) $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0; \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 4, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0; \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 6, \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \omega'' + \omega = 0; \\ \omega(0) = -1, \quad \omega'(0) = -1, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'' - 7y' + 10y = 0; \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = -5, \end{cases}$ (e) $\begin{cases} y'' + 5y' - 6y = 0; \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = -5, \end{cases}$. (f) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = -8\cos t - 2\,\text{sen}\, t; \\ y(\pi/2) = 1, \quad y'(\pi/2) = 0, \end{cases}$

Bons estudos!