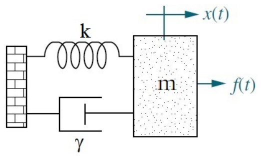
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

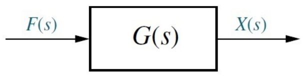
15a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

19 de junho de 2019

(1) Considere o sistema Massa-Mola com amortecimento abaixo e ao lado o diagrama de blocos que descreve esse sistema.





Suponha que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} mx'' + \gamma x' + kx = f(t); \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0, \end{cases}$$

com massa $m \geq 0$, coeficiente de amortecimento viscoso $\gamma \geq 0$ e constante elástica da mola $k \geq 0$ e dados iniciais $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$ modele este sistema, onde $f(t)$ é uma força externa (input) e $x(t)$ é a posição da massa no tempo t (output). A Função de Transferência $G(s)$ do sistema pode ser obtida através do quociente entre a Transformada de Laplace da saída do sistema pela Transformada de Laplace da entrada do sistema, isto é, a Função de Transferência do sistema é dada por

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{x(t)\}}{\mathcal{L}\{f(t)\}} = \frac{X(s)}{F(s)}.$$

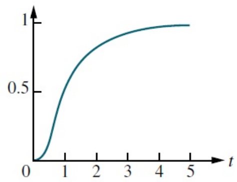
(a) Obtenha $X(s)$ e em seguida $G(s)$.

(b) Considerando uma entrada $f(t) = 9u_0(t)$ (função degrau), calcule $x(t)$ para cada conjunto de parâmetros abaixo.

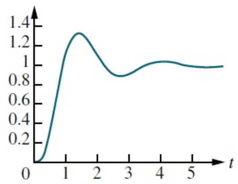
(b.1) $m = 1$, $\gamma = 0$ e $k = 9$; (b.2) $m = 1$, $\gamma = 2$ e $k = 9$; (b.3) $m = 1$, $\gamma = 6$ e $k = 9$; (b.4) $m = 1$, $\gamma = 10$ e $k = 9$.

(c) Ainda com os valores de m, γ e k dados nos itens da letra (b), represente com um $\times$ no plano-s (plano complexo $\sigma +$ as raízes do denominador de $G(s)$. (São os chamados *pólos* do sistema)

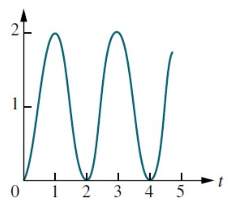
(d) Dentre os gráficos abaixo, escolha o que mais se aproxima com o da função $x(t)$ obtida em cada um dos itens (b).



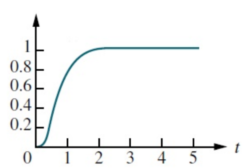
Overdamped
(Sobreamortecido)



Underdamped
(Subamortecido)



Undamped
(Não amortecido)



Critically Damped
(Criticamente Amortecido)

(2) Sabendo que $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ e que $\zeta^2 = \dfrac{\gamma^2}{4mk}$,

(a) mostre que $G(s) = \dfrac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$ pode ser escrito como

$$G(s) = \frac{k}{ms^2 + \gamma s + k}.$$

(b) Prove que os pólos de $G(s)$ acima são $s = \dfrac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$ e que s é equivalente a

$$s = -\omega_0(\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}).$$

(c) Calcule o módulo do número complexo s dado pela expressão acima.

(d) Use um software gráfico (como o geogebra, por exemplo) para representar com um $\times$ no plano complexo os números complexos

$$p = -\omega_0(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})$$

e seu conjugado

$$\overline{p} = -\omega_0(\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2}),$$

em função dos parâmetros ω_0 e ζ. Varie estes parâmetros e observe o comportamento dos pontos no gráfico.

(3) Para as funções de transferência abaixo, determine a frequência natural ω_0 e o fator de amortecimento ζ do sistema. Classifique o sistema em *instável, não-amortecido, sub-amortecido, criticamente amortecido* ou *sobre-amortecido.*

(a) $G(s) = \dfrac{400}{s^2 + 12s + 400}$

(b) $G(s) = \dfrac{900}{s^2 + 90s + 900}$

(c) $G(s) = \dfrac{225}{s^2 + 30s + 225}$

(d) $G(s) = \dfrac{625}{s^2 + 625}$

Bons estudos!