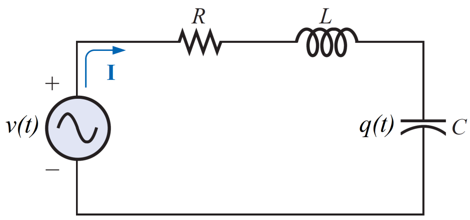
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

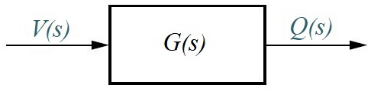
16a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

24 de junho de 2019

(1) Considere o sistema composto pelo circuito RLC em série abaixo e ao lado o diagrama de blocos que descreve esse sistema.





Suponha que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} Lq'' + Rq' + \dfrac{1}{C}q = v(t); \\ \\ q(0) = q_0, \quad q'(0) = i_0, \end{cases}$$

com resistência $R \geq 0$, indutância $L \geq 0$ e capacitância $C \geq 0$ e dados iniciais $q_0 = 0$ e $i_0 = 0$ modele este sistema, onde $v(t)$ é tensão de entrada (input) e a saída $q(t)$ é carga no capacitor (output). A Função de Transferência $G(s)$ do sistema pode ser obtida através do quociente entre a Transformada de Laplace da saída do sistema pela Transformada de Laplace da entrada do sistema, isto é, a Função de Transferência do sistema é dada por

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{q(t)\}}{\mathcal{L}\{v(t)\}} = \frac{Q(s)}{V(s)}.$$

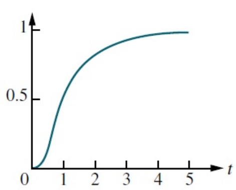
(a) Obtenha $Q(s)$ e em seguida $G(s)$.

(b) Considerando $v(t) = 9u_0(t)$ (função degrau), calcule $q(t)$ e a corrente $i(t) = q'(t)$ para cada caso abaixo.

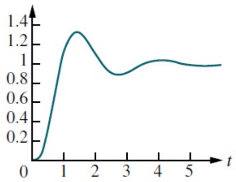
(b.1) $L = 1$, $R = 0$ e $C = 1/9$; (b.2) $L = 1$, $R = 2$ e $C = 1/9$;
(b.3) $L = 1$, $R = 6$ e $C = 1/9$; (b.4) $L = 1$, $R = 10$ e $C = 1/9$.

(c) Ainda com os valores de L, R e C dados nos itens da letra (b), represente com um $\times$ no plano-s (plano complexo σ - as raízes do denominador de $G(s)$. (São os chamados *pólos* do sistema)

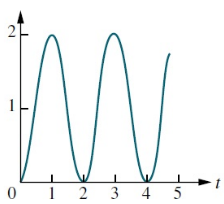
(d) Dentre os gráficos abaixo, escolha o que mais se aproxima com o da função $q(t)$ obtida em cada um dos itens (b).



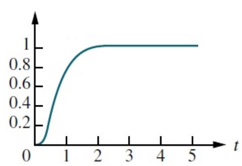
Overdamped
(Sobreamortecido)



Underdamped
(Subamortecido)



Undamped
(Não amortecido)



Critically Damped
(Criticamente Amortecido)

(2) Sabendo que $G(s) = \dfrac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$ pode ser escrito como

$$G(s) = \frac{1/C}{Ls^2 + Rs + 1/C},$$

mostre que $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ e que $\zeta = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

(3) Para ver o efeito da mudança no parâmetro R no problema de valor inicial abaixo,

$$\begin{cases} q'' + Rq' + 4q = 0 \\ q(0) = 1, \\ q'(0) = 0. \end{cases}$$

resolva o problema para $R = 5$, $R = 4$ e $R = 2$ e esboce o gráfico das soluções. Em cada caso, determine ω_0 e ζ.

(4) Suponha que a transformada de Laplace de $f(t)$ seja a função

$$F(s) = \frac{3s^2 - 1}{s^2 + s + 1},$$

Encontre as Transformadas de Laplace abaixo

(a) $\mathcal{L}\left\{e^{-t} f(t)\right\} =$

(b) $\mathcal{L}\left\{e^{3t} f(t)\right\} =$

(c) $\mathcal{L}\left\{e^{-t/2} f(t)\right\} =$

(d) $\mathcal{L}\left\{-t f(t)\right\} =$

(e) $\mathcal{L}\left\{-t * f(t)\right\} =$

(f) $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t \operatorname{sen}\left(3(t-\tau)\right) f(\tau) d\tau\right\} =$

Dicas: a-c. Deslocamento complexo, d.derivada da transformada, e-f. convolução

(5) Dada

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{4s}{s^2 + 1},$$

encontre

(a) $\mathcal{L}\left\{u_1(t) f(t-1)\right\} =$

(b) $\mathcal{L}\left\{3u_2(t) f(t-2)\right\} =$

(c) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{u_4(t) f(t-4)}{2}\right\} =$

(d) $\mathcal{L}\left\{u_3(t) f(t-3)\right\} =$

Dicas: a-d. Deslocamento temporal.

Bons estudos!