UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

17a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

14 de novembro de 2018

(1) Para cada arco γ e função f abaixo, encontre o valor de

$$\int_\gamma f(z)dz,$$

após observar que γ é um contorno[1] e que f é contínua por partes.

(a) $f(z) = y - x - 3x^2yj$ e γ

(i) é o segmento de reta de $z = 0$ até $z = 1 + j$;

(ii) consiste de dois segmentos de reta, um de $z = 0$ até $z = j$ e outro de $z = j$ até $z = 1 + j$;

(iii) consiste de dois segmentos de reta, um de $z = 0$ até $z = 1$ e outro de $z = 1$ até $z = 1 + j$; Resp. $(3/4)(1-j); (1/2)(1-j); 1-j/2$

(b) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ e γ é

(i) o semicírculo $z = 2e^{j\theta}$, com $0 \le \theta \le \pi$;

(ii) o semicírculo $z = 2e^{j\theta}$, com $\pi \le \theta \le 2\pi$;

(iii) o círculo $z = 2e^{j\theta}$, com $-\pi \le \theta \le \pi$; Resp. $2\pi j - 4; 2\pi j + 4; 4\pi j$

(c) $f(z) = z - 1$ e γ é o arco de $z = 0$ até $z = 2$ consistindo do

(i) semicírculo $z - 1 = e^{j\theta}$, com $0 \le \theta \le \pi$;

(ii) segmento com $0 \le x \le 2; y = 0$ de sobre o eixo-x; Resp. $0; 0$

(d) γ é o arco de $z = -1 - j$ até $z = 1 + j$ ao longo da curva $y = x^3$, e

$$f(z) = \begin{cases} 4y, & y > 0 \\ 1, & y < 0 \end{cases}$$

Resp. $2 + 3j$

(e) $f(z) = e^z$ e γ é o arco de $z = \pi j$ até $z = 1$ consistindo

(i) do segmento de reta que une estes pontos;

(ii) da porção dos eixos coordenados que ligam esses pontos. Resp. $1 + e; 1 + e$

[1] Lembre-se que um contorno é uma curva consistindo de um numero finito de arcos suaves por partes; que um arco é uma curva $\gamma(t)$ contínua e que ser suave significa que a derivada $\gamma'(t)$ existe, é continua e nunca se anula em seu domínio.

(2) Seja α o arco do círculo $|z| = 2$ de $z = 2$ à $z = 2j$ que está no primeiro quadrante. Sem calcular a integral, mostre que

$$\left|\int_\alpha \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \pi/3.$$

(3) Determine o domínio de analiticidade da função f e aplique o teorema de Cauchy-Goursat para calcular

$$\int_\gamma f(z)dz,$$

onde a curva fechada simples γ é a circunferência $|z| = 1$ e

(a) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-3}$ (b) $f(z) = ze^{-z}$ (c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+2}$

(d) $f(z) = \text{sech} z$ (e) $f(z) = \text{tg} z$ (f) $f(z) = \log(z+2)$

Resp. Todas nulas.

(4) Seja B a fronteira da região no interior da circunferência $|z| = 4$ e no exterior do quadrado de vértices $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, orientadas positivamente. Calcule

$$\int_B f(z)dz,$$

onde

(a) $f(z) = \dfrac{1}{3z^2+1}$ (b) $f(z) = \dfrac{z+2}{\text{sen}(z/2)}$ (c) $f(z) = \dfrac{z}{1-e^z}$

Resp. Todas nulas.

(5) Seja C uma curva fechadas simples no interior de uma curva fechada simples C_0 ambas orientadas no sentido anti-horário. Mostre que se f é analítica na região fechada delimitada por C e C_0, então

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz.$$

(6) Use o resultado do exercício anterior (calculando a integral de linha sobre uma circunferência conveniente de sua preferência) para mostrar que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-2-j} = 2\pi j;$$

onde a curva γ é o retângulo $0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2$ orientado no sentido positivo.

(7) Calcule cada uma das integrais de linha, onde a curva γ é um contorno arbitrário[2] entre pontos indicados nos limites de integração.

[2] assumindo apenas que a curva está dentro de um domínio simplesmente conexo no qual a função no integrando é analítica

(a) $\displaystyle\int_{j}^{j/2} e^{\pi z} dz$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi+2j} \cos(z/2) dz$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{3} (z-2)^3 dz$ (d) $\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2}; \quad z_1 \neq z_2$ e $z_1, z_2 \neq 0.$

Resp. $(1+j)/\pi; e+1/e; 0; 1/z_1 - 1/z_2$

(8) Seja γ a circunferência $|z| = 3$, descrita no sentido positivo. Supondo que

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{2s^2 - s - 2}{s - z} ds$$

onde $|z| \neq 3$. Calcule $g(2)$ e $g(z)$, quando $|z| > 3$.

Resp. $8\pi j; 0$

(9) Seja γ uma curva fechada simples descrita no sentido positivo e seja

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{s^3 + 2s}{(s - z)^3} ds.$$

Calcule $g(z)$, quando z esta no interior de γ e, em seguida, calcule $g(z)$, quando z esta no exterior de γ .

Resp. $6\pi jz; 0$

(10) Seja C a fronteira do quadrado no plano complexo cujos lados estão ao longo das linhas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$, descrito no sentido positivo. Calcule cada uma destas integrais.

(a) $\displaystyle\int_C \frac{\exp(-z)dz}{z - \pi j/2}$ (b) $\displaystyle\int_C \frac{\cos z dz}{z(z^2+8)}$

(c) $\displaystyle\int_C \frac{zdz}{2z+1}$ (d) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{tg}(z/2)dz}{(z-x_0)^2}$; com $-2 < x_0 < 2$

(e) $\displaystyle\int_C \frac{\cosh z dz}{z^4}$ (f) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{sech}(z)dz}{z(z-\pi^2\sqrt{2}/e)(z-e^2\sqrt{2}/\pi)}$;

Resp. $2\pi; \pi j/4; -\pi j/2; j\pi \sec^2(x_0/2); 0; j/e$

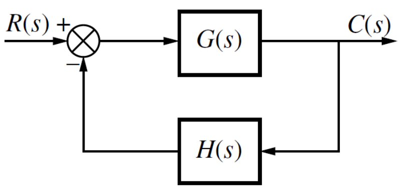
(11) Encontre o valor da integral de $g(z)$ sobre a curva fechada simples

$$|z - j| = 2,$$

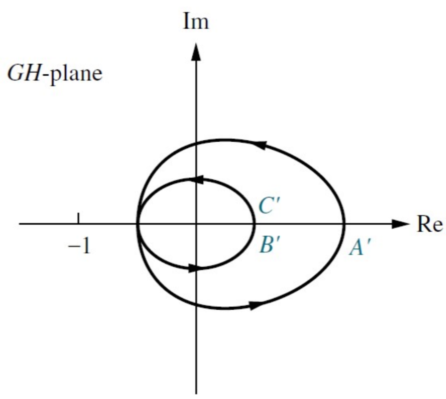
orientada no sentido positivo quando,

(a) $g(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$ (b) $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$ Resp. $\pi/2; \pi/16$

(12) Suponha que para o sistema abaixo, está associada a curva da imagem abaixo



(Estamos tratando de um *Nyquist Plot* de $G(s)H(s)$). Responda: Quantas vezes esta curva circula a origem? Quantas vezes essa curva circula o ponto $z = -1$?



Bons estudos!