UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

17a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146
Prof. Júlio César do Espírito Santo

24 de junho de 2019

(1) Prove o Teorema do Valor Inicial: Se f' e f forem funções admissíveis à Laplace e $\mathcal{L}\{u_1(t)f(t-1)\}$, então

$$f(0^+) := \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to+\infty} sF(s).$$

(2) Enuncie o Teorema do Valor Final. Explique sob que condições sobre $F(s)$ este teorema pode ser aplicado.

(3) Seja $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. Em cada caso abaixo, use o Teorema do Valor Final, **quando possível**, para obter o valor final $f(\infty)$ da função $f(t)$. Explique porque é ou não possível o uso do Teorema.

(a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ (b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ (c) $F(s) = \dfrac{1}{s+2}$ R. a.1;b.ñ;c.0

(4) Encontre o valor final $f(\infty)$ da funções abaixo por meio do Teorema do Valor Final.

(a) $f(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(t)$ (b) $f(t) = e^{-t}+1$ (c) $f(t) = e^{-3t}\cos(t)+5$

(5) Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Prove que

(a) $F'(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$ (b) $F''(s) = \mathcal{L}\{t^2 f(t)\}$.

Conclua que $F^{(n)}(s) = (-1)^n\mathcal{L}\{t^n f(t)\}$.

(6) Calcule.

(a) $\mathcal{L}\{t\cos(\omega_0 t)\}$ (b) $\mathcal{L}\{t^2\operatorname{sen}(\omega_0 t)\}$ (c) $\mathcal{L}\{t\operatorname{senh}(\omega_0 t)\}$ (d) $\mathcal{L}\{t\cosh(\omega_0 t)\}$

(e) $\mathcal{L}\{ty(t)\}$ (f) $\mathcal{L}\{ty'(t)\}$ (g) $\mathcal{L}\{ty''(t)\}$

R.a.$(s^2-\omega_0^2)/(s^2+\omega_0^2)^2$.e.$-Y'(s)$.f.$-Y(s)-sY'(s)$.g.$y(0)-s^2Y'(s)-2sY(s)$.

(7) Use Transformadas de Laplace para resolver os Problemas de valor inicial a seguir.

(a) $\begin{cases} ty''+(1-t)y'+y=0; \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-2, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} ty''+(1-t)y'+2y=0; \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-2, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y''+ty'-y=0; \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1, \end{cases}$

Dica para a letra (c): Em EDO's de primeira ordem do tipo

$$y'+p(t)y=q(t)$$

podemos usar um fator integrante $\mu(t) = \exp\int p(t)dt$ ...

R.a.$1-t$; b.$1-2t-t^2/2$; c. Em $Y(s) = 1/s^2(1+C\cdot exp(s^2/2))$, faça $C=0$ para que y seja admissível e obtenha $y(t)=t$; d.s.

(8) (a) Como $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$, calcule $\mathcal{L}\{t\,\text{sen}(t)\}$.

(b) Como $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^{+\infty} F(s)ds$, (desde que exista $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$), calcule $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\text{sen}(t)}{t}\right\}$.

R.a.$\mathcal{L}\{t\,\text{sen}(t)\} = 2s/(s^2+1)^2$b.$\mathcal{L}\{\text{sen}(t)/t\} = \pi/2 - \text{arctg}(s) = \text{arctg}(1/s)$

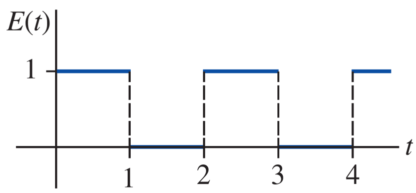
(9) Se $f(t)$ é uma função admissível a Laplace, periódica, de período T, é possível provar que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt,$$

calcule a transformada da função periódica

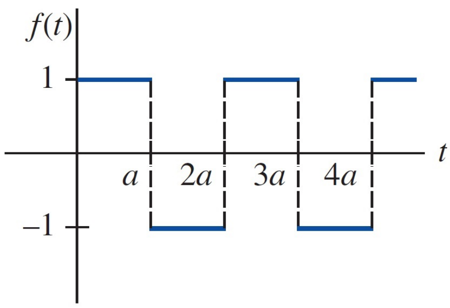
$$E(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le t < 1; \\ 0 & \text{se } 1 \le t < 2; \end{cases}$$

de período é $T = 2$ e cujo gráfico está abaixo.

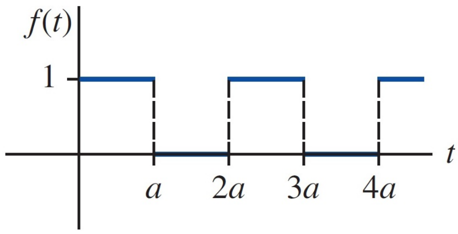


R.$1/(s(1+e^{-s}))$

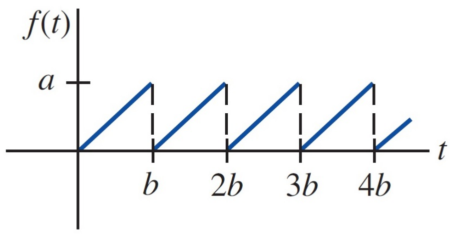
(10) Calcule a transformada de Laplace das Funções periódicas a seguir.



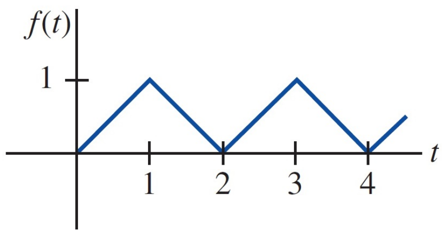
(a) Meander function



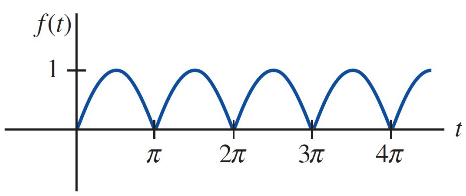
(b) Square wave



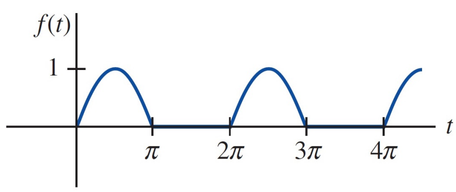
(c) Sawtooth function



(d) Triangular wave



(e) Full-wave rectification of sin t



(f) Half-wave rectification of sin t

R.a.$(1+e^{-as})/(s(1-e^{-as})) = \tanh(as/2)/s$;c.$b/(as^2) - be^{-sa}/(s(1-e^{-sa}))$ d.$\tanh(as/2)/(as^2)$;e.$(s^2+1)^{-1}\text{cotgh}(\pi s/2)$

Bons estudos!