UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

19a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

04 de junho de 2018

(1) Use resíduos para provar que as integrais abaixo convergem para os valores indicados. Considere $a > 0$.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{200}$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{6}$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(ax)dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}e^{-a}$

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(ax)dx}{x^4+4} = \frac{\pi}{2}e^{-a}\,\mathrm{sen}(a)$

(2) Determine o valor principal de Cauchy de cada uma das seguintes integrais convergentes.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+1)}$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}\,x dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{sen}\,x dx}{x^2+4x+5}$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x dx}{(x+a)^2+b^2}$; com $b > 0$

$\pi;\ -\pi/5;\ \pi/2;\ .24352;\ -(\pi/e)\,\mathrm{sen}\,2$

(3) Use resíduos para estabelecer as seguintes fórmulas de integração.

Considere para os itens (b) e (d) que $-1 < a < 1$; no item (e), que $b > 1$ e no item (f) que $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{2\pi}{3}$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}};$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)d\theta}{5 - 4\cos(2\theta)} = \frac{3\pi}{8}$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(2\theta)d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = \frac{\pi a^2}{1-a^2};$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(b+\cos\theta)^2} = \frac{\pi a}{(b^2-1)^{3/2}};$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^{\,2n}(\theta)\,d\theta = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)}.$

(4) Prove que a integral converge para o valor indicado.

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx = \frac{\pi}{4}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{e}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+e^2}dx = \frac{\pi}{2e}$

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{\pi}{4}$

(5) (a) Após uma pesquisa, use resíduos para provar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Faça o mesmo para

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

.

Bons estudos!