UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

19a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

29 de junho de 2019

(1) Aplique, se possível, o teorema de Cauchy para calcular as integrais abaixo

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^2}{z-3} dz$ (b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2z+2}$ (c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \text{tg} z dz$

Resp. Todas nulas.

(2) Calcule cada uma das integrais de linha, onde a curva γ é um contorno arbitrário[1] entre pontos indicados nos limites de integração.

(a) $\displaystyle\int_{j}^{j/2} e^{\pi z} dz$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi+2j} \cos(z/2) dz$ Resp. $(1+j)/\pi; e + 1/e;$

(3) Encontre o valor da integral de $g(z)$ sobre a curva fechada simples $|z-j| = 2$, orientada no sentido antihorário quando,

(a) $g(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$ (b) $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$ Resp. $\pi/2; \pi/16$

(4) <u>Escreva</u> a série de Laurent que converge para cada uma das funções abaixo, para z na região convergência descrita.

(a) $\text{sen}(z);\ |z| < \infty;$ (b) $\cos(z);\ |z| < \infty$ (c) $\exp(z);\ |z| < \infty;$

(d) $\dfrac{1}{1-z};\ |z| < 1.$ (e) $\dfrac{1}{1+z};\ |z| < 1.$ (f) $\dfrac{1}{1-z^{-1}};\ |z| > 1.$

Resp. $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!; |z| < \infty;$ $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} z^{2n}/(2n)!; |z| < \infty$ $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!; |z| < \infty;$ $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n; |z| < 1;$ $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n; |z| < 1;$ $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}; |z| > 1;$

(5) Derivando a Série de Maclaurin para $1/(1-z)$, obtenha as representações em série para

(a) $\dfrac{1}{(1-z)^2}$, (b) $\dfrac{1}{(1-z)^3}$.

Resp. $\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}; |z| < 1;$ $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) z^{n-2}; |z| < 1$

(6) Expanda a função $1/z$ em séries de potências de $z-1$, depois obtenha por derivação termo-a-termo, a expansão de $1/z^2$ em potências de $z-1$. Forneça as regiões de validade.

(7) Obtenha as expansões em Séries de Laurent da função $f(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z-2}$ em torno de $z = 1$ e $z = 2$.

Resp. Questão resolvida na Plataforma no Moodle e no estudo dirigido.

(8) Mostre que as singularidades das funções são pólos. Determine a ordem m dos pólos e os correspondentes resíduos b_1.

(a) $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$ (b) $\dfrac{1-\exp(2z)}{z^4}$ (c) $\dfrac{\exp(2z)}{(z-1)^2}$ (d) $\dfrac{\exp(z)}{z^2+\pi^2}$

Resp. $a.m = 1, b_1 = -1/2, 3/2; b.m = 3, b_1 = -4/3;$

(9) Calcule, por meio de resíduos, a integral

$$\int_{\gamma} \frac{3z^3 + 2dz}{(z-1)(z^2+9)},$$

onde γ é tomada no sentido anti-horário em torno do círculo (a) $|z-2| < 2$; (b) $|z| < 4$ (c) $|z+2| < 2$.

Resp. $a.\pi j; 6\pi j; 0$

(10) Use resíduos para provar que as integrais abaixo convergem para os valores indicados. Considere $a > 0$.

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Bons estudos!

[1] assumindo apenas que a curva está dentro de um domínio simplesmente conexo no qual a função no integrando é analítica