Primeira Avaliaçao de Análise III - MTM228

Prof. Júlio César do Espírito Santo
Universidade Federal de Ouro Preto
16 de maio de 2016

Estudante: ——————————————————————-

(1) Prove que (a) uma norma qualquer $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua. (b) Em seguida, mostre que se $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável em $a \in [\alpha,\beta]$ então ela é contínua nesse ponto.

(2) (Envoltória Convexa). Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. A Envoltória Convexa de X é a intersecção $C(X)$ de todos os subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contém X. Prove que

$$C(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \Big/ x_i \in X;\ \alpha_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\}.$$

(3) O conjunto das aplicações lineares injetivas é aberto em $L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, assim como o conjunto das aplicações lineares sobrejetivas. Em todo conjunto aberto não vazio $\mathcal{O}$ de $L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, existe uma aplicação linear injetiva (se $m \leq n$) ou sobrejetiva (se $m \geq n$).

(4) Dada uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, e fixadas as normas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, a imagem por A da esfera unitária $\mathbb{S}^{m-1}$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^n$. Utilizando, para cada $A \in L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, $||A|| = \sup\{||Ax||; x \in \mathbb{S}^{m-1}\}$, a aplicação $A \mapsto ||A||$ é uma norma no espaço vetorial $L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$.
Temos ainda:

$$||Ax|| \leq ||A||\ ||x||,$$

para todo $A \in L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ e

$$||AB|| \leq ||A||\ ||B||,$$

para todos $A, B \in L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$.

(5) (Funções Convexas) Se $C \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto convexo, uma função $f : C \to \mathbb{R}$ chama-se convexa quando para quaisquer $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$, tem-se

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x).$$

Mostre que qualquer que seja $f : C \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função convexa e todo $c \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $x \in C$ tais que $f(x) \leq c$ é convexo. Dê um exemplo mostrando que a recíproca é falsa.

Boa Prova!