UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Primeira Lista de Exercícios de Introdução às EDO's - MTM125
Prof. Júlio César do Espírito Santo
18 de Outubro de 2017

(1) Nas equações diferenciais abaixo, da maneira que se apresentam, decida se as mesmas são Equações Diferenciais Ordinárias ou Equações Diferenciais Parciais, se são lineares ou não lineares. Sempre que possível identifique a incógnita e a(as) variável(is) independente(s).

(a) $L\dfrac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\dfrac{dQ(t)}{dt} + \dfrac{1}{C}Q(t) = E(t)$

(b) $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x)$ *(Ricatti)*

(c) $(\cos y)\dot{y} + 2x \operatorname{sen} y = -2x$

(d) $\dfrac{dy}{dt} + P(x)y = Q(x)y^n$ *(Bernoulli)*

(e) $p' = p(a - b\ln p)$ *(Gompertz,1825)*

(f) $\dfrac{dP}{dt} = \alpha P\left(1 - \dfrac{P}{P_\infty}\right)$ *(Logística)*

(g) $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$

(h) $(1+y^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + y = e^t$

(i) $\dfrac{d^4y}{dt^4} + \dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = 1$

(j) $u_{tt} = c^2u_{xx}$ *(onda)*

(k) $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta = 0$ *(pêndulo simples)*

(l) $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ *(calor)*

(m) $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$
(Korteweg-de Vries, KdV for short)

(n) $\dot{y} = \alpha y$ *(Malthus)*

(o) $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$
(oscilador harmônico simples)

(p) $y' = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ *(Perseguição)*

(q) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$ *(Bessel)*

(r) $\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{d}{dx}P_n(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0$ *(Legendre)*

(s) $u''(r) + \dfrac{N-1)}{r}u'(r) = 0$ *(Laplace, radial)*

(t) $u_{tt} + u_{xx} = 0$ *(Laplace)*

(u) $\dfrac{dx}{dt} = (R - R_c)x - ax^3$ *(Landau)*

(v) $u_t + uu_x = 0$ *(Burgers)*

(x) $A\rho v_{tt}(x,t) + EIv_{xxxx}(x,t) + kv_t(x,t) = -f(x,t) - A\rho g$ *(viga)*

(z) $x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = 0$ *(Cauchy-Euler)*

(2) Obtenha as soluções das seguintes EDOs:

(a) $y' = kx$;

(b) $y' = (1+y)/(1+x)$;

(c) $y' = (1+x)(1+y)$;

(d) $y' = 2xy + x$;

(e) $\dot{y} - (tg(t))y = \cos t$.

(3) Para as equações anteriores determine a soluçlão do problema de valor inicial com $y(0) = 1$. Diga os domínios de definição das soluções.

(4) Para as equações diferenciais abaixo, desenhe um campo de direções e determine o comportamento de y quando t torna-se muito grande. Se esse comportamento depender do valor inicial $y(0)$, descreva essa dependência.

(a) $y' = 3 - 2y$

(b) $y' = 2y - 3$

(c) $y' = 3 + 2y$

(d) $y' = y(4-y)$

(e) $y' = -y(5-y)$

(f) $y' = y^2$

(g) $y' = y(y-2)^2$

(h) $y' = -2 + t - y$

(i) $y' = te^{-2t} - 2y$

(j) $y' = 3\,\mathrm{sen}(t) + 1 + y$

(5) Resolva cada um dos problemas de valor inicial a seguir e desenhe os gráficos das soluções para diversos valores de y_0. Descreva as relações que existem entre as soluções.

(a) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -y + 5 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2y + 5 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2y + 10 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(6) *(Equação de Bernoulli)* Mostre que a mudança de variávies $x^{1-n} = y$ transforma a *Equação de Bernoulli*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^n,$$

onde $n \in \mathbb{Z}$, numa equação linear.

(7) Resolva os seguintes problemas de valor inicial. (Note que tratam-se de Equações de Bernoulli.)

(a) $\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x}y = (\cos x)y^{-2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + x^2 y = \dfrac{1}{x^2}y^4 \\ y(-1) = -2 \end{cases}$

(8) Mostre que a equação $(\cos y)y' + 2x \operatorname{sen} y = -2x$ pode ser transformada em uma equação linear. (Sugestão: $z = \operatorname{sen} y$).

(9) (*Equação de Ricatti)* A equação

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x) \tag{0.1}$$

é chamada *Equação de Ricatti*.

(a) Mostre que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação (0.1), então, a função $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ é a solução da equação de Bernoulli

$$z' + (P + 2y_2 Q)z - Qz^2 = 0.$$

(b) Sabendo que $y(x) = x$ é uma solução da equação de Ricatti

$$y' + x^3 y - x^2 y^2 = 1,$$

determine as demais soluções.

(c) Sabendo que $y(x) = x^2$ é uma solução da equação de Ricatti

$$y' = y^2 + 2x - x^4,$$

determine as demais soluções.

(d) $y' = y(4 - y)$

(10) Mostre que se $y = \phi(t)$ é uma solução de $y' + p(t)y = 0$, então $y = c\phi(t)$ também é uma solução para qualquer valor da constante c.

Bom Estudo!